

THÉORÈMES D'ÉQUIDISTRIBUTION POUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES D'ORIGINE ARITHMÉTIQUE

Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux,
États de la Recherche, mai 2006

Antoine Chambert-Loir

Antoine Chambert-Loir

IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.

E-mail: `antoine.chambert-loir@univ-rennes1.fr`

Url: `http://name.math.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir`

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	5
1. Hauteurs sur l'espace projectif	7
§1.1. Hauteur d'un point rationnel.....	8
§1.2. Hauteur d'un point algébrique.....	14
§1.3. Fonctorialité.....	22
§1.4. Finitude.....	27
§1.5. Hauteurs locales et fonctions de Green.....	29
§1.6. Exercices.....	36
2. Systèmes dynamiques d'origine arithmétique	39
§2.1. Systèmes dynamiques polarisés.....	39
§2.2. Quelques conjectures.....	50
§2.3. Un théorème d'équidistribution et ses applications.....	61
§2.4. Exercices.....	67
3. Équidistribution sur la droite projective	71
§3.1. Fonctions de Green.....	71
§3.2. Démonstration du théorème d'équidistribution.....	77
§3.3. Preuve de l'inégalité de Baker.....	81
§3.4. Le théorème d'équidistribution de Bilu.....	84
§3.5. Exercices.....	88
Bibliographie	91

INTRODUCTION

Ce texte est une introduction à quelques problèmes arithmétiques liés aux systèmes dynamiques issus de la géométrie algébrique. Il se comporte de trois chapitres assez autonomes, issus des trois exposés que j'avais faits lors des *États de la recherche* en mai 2006 à Rennes.

Le premier chapitre, *Hauteurs sur l'espace projectif*, explique la théorie des hauteurs, initiée par WEIL et NORTHCOTT, et en démontre les principales propriétés fondamentales, notamment la variation de la hauteur sous l'effet d'un morphisme et le théorème de finitude. La théorie est bien plus simple lorsque l'on se borne au cas du corps des nombres rationnels, car toutes les subtilités liées à la théorie algébrique des nombres s'évanouissent alors. Nous nous limitons d'ailleurs à ce cas dans le premier paragraphe, et en profitons pour donner un aperçu de ce que cette théorie peut dire des systèmes dynamiques polynomiaux, en particulier de leurs points prépériodiques. C'était en effet la motivation initiale du théorème de finitude. Une dernier paragraphe, d'esprit plus analytique, exprime la hauteur d'un point comme somme de termes locaux ; le formalisme des fonctions de Green que nous introduisons est inspiré du langage de la géométrie d'Arakelov.

Le second chapitre est consacré aux systèmes dynamiques polynomiaux et, principalement, à ceux qui sont *polarisés* au sens de ZHANG (2006). Nous expliquons un certain nombre de conjectures arithmétiques les concernant, en tâchant de décrire quelques exemples et quelques démonstrations. De fait, la résolution de certaines de ces conjectures dans l'exemple du système dynamique donné par la multiplication par 2 dans une variété abélienne est l'une des grandes avancées du sujet dans les années 1980–2000. Nous introduisons enfin le théorème d'équidistribution de SZPIRO *et al.* (1997) et ébauchons son application à la résolution des conjectures évoquées, ainsi que quelques généralisations. Peu de temps avant que ce texte n'entre sous presse, j'ai appris l'existence du contre-exemple de GHIOCA & TUCKER (2009) à certaines de ces conjectures ; nous en profitons pour le décrire.

La preuve de ce théorème d'équidistribution requiert tout l'arsenal de la géométrie d'Arakelov et sort du cadre de ces notes. Dans un dernier chapitre, nous le démontrons dans le cas particulier d'un système dynamique associé à une fraction rationnelle de degré ≥ 2 en une variable. Suivant la méthode de BILU (1997), nous montrons enfin

comment un cas particulier implique certaines des conjectures du chapitre 2 pour les systèmes dynamiques toriques.

Chacun des chapitres se termine par quelques exercices et compléments, parfois issus de la littérature récente.

Depuis une dizaine d'années, l'étude arithmétique des systèmes dynamiques polynomiaux s'est considérablement développée. L'objet initial de ces exposés était d'expliquer à un public principalement issu de la dynamique holomorphe les théorèmes d'équidistribution en géométrie d'Arakelov. Le lecteur intéressé trouvera dans l'ouvrage SILVERMAN (2007) de nombreux développements qui n'ont pu trouver leur place dans ce texte.

Je remercie les organisateurs de m'avoir invité à donner ce cours, et le public, nombreux, pour sa participation. Je remercie aussi P. AUTISSIER, M. BAKER, S. CANTAT, T.-C. DINH, V. GUEDJ, L. MORET-BAILLY, N. SIBONY, ainsi que le rapporteur, pour leurs commentaires pendant la conférence ou sur des versions préliminaires de ce texte. Je remercie enfin D. GHIOCA et T. TUCKER de m'avoir autorisés à inclure leur contre-exemple, non encore publié.

CHAPITRE 1

HAUTEURS SUR L'ESPACE PROJECTIF

La méthode de « descente infinie » initiée par Pierre de FERMAT (1601–1665) dans l'étude des équations diophantiennes repose sur trois piliers :

- une notion de *taille* d'une solution d'une telle équation ;
- à partir d'une solution donnée, la construction d'une solution de taille moindre ;
- le fait que ces tailles — usuellement des nombres entiers — ne peuvent diminuer indéfiniment.

Cette méthode a permis à FERMAT d'établir des résultats négatifs, par exemple l'inexistence de triangles rectangles à côtés entiers dont l'aire soit un carré parfait, problème qui se ramène à « l'équation de Fermat » de degré 4. Elle intervient aussi dans la démonstration par Ernst KUMMER (1810–1893) du grand théorème de FERMAT pour les nombres premiers réguliers⁽¹⁾. Plus remarquablement peut-être, elle a aussi permis de prouver des résultats positifs ; citons par exemple la démonstration (1747) de Leonhard EULER (1707–1783) que tout nombre premier congru à 1 modulo 4 est somme de deux carrés (un théorème annoncé par FERMAT lui-même en 1640).

Cette méthode a deux avatars modernes. Le premier, la *théorie des hauteurs*, auxquelles ce texte est consacré, est une version géométrisée de la notion de taille d'une solution d'une équation diophantienne. Elle fut développée à la fin des années 40 par André WEIL (1906–1998) et Douglas Geoffrey NORTHCOTT (1916–2005). C'est en effet l'un des deux ingrédients de la preuve du théorème de MORDELL–WEIL selon lequel les points rationnels d'une variété abélienne définie sur un corps de nombres forment un groupe abélien de type fini (voir par exemple SERRE (1997)). NORTHCOTT utilisa ce concept de hauteur pour établir des propriétés arithmétiques de certains systèmes dynamiques ; nous y reviendrons amplement.

L'autre ingrédient de la démonstration du théorème de MORDELL–WEIL résulte du théorème de finitude de HERMITE–MINKOWSKI en théorie algébrique des nombres et

⁽¹⁾Ce sont les nombres premiers p qui ne divisent pas le numérateur d'un des nombres de Bernoulli B_2, B_4, \dots, B_{p-3} , ou plus conceptuellement, les nombres premiers p tel que le groupe des classes d'idéaux du corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ soit d'ordre premier à p .

d'un argument de cohomologie galoisienne. Son élaboration moderne, *variétés de descente*, lois de réciprocité et *principes local-global*, sort largement du cadre de cet article. Je renvoie au survol (1992) de J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE pour une première introduction.

Revenons aux hauteurs. Dans les applications modernes à l'arithmétique, il est souvent utile, voire crucial, d'assouplir le strict point de vue « équationnel » des classiques pour mieux exploiter les propriétés géométriques des objets étudiés. On est ainsi plutôt amené à définir la hauteur d'un point de l'espace projectif, voire d'une variété projective, et à étudier le comportement de cette hauteur par des morphismes de variétés algébriques. Il faudra étendre les définitions naïves que l'on peut adopter pour les nombres entiers au cas des nombres algébriques. Nous commençons cependant ce cours par le cas des points rationnels : il fait déjà apparaître les idées principales tout en évitant les complications dues à la théorie algébrique des nombres.

§1.1. Hauteur d'un point rationnel

A. Définition

Soit donc k un entier naturel et notons \mathbf{P}^k l'espace projectif de dimension k . Voyons-le comme *schéma*, c'est-à-dire comme la donnée, pour tout anneau A , de l'ensemble $\mathbf{P}^k(A)$ de ses points à coordonnées dans A . De fait, nous n'aurons besoin pour l'instant que du cas où A est un corps F : alors, $\mathbf{P}^k(F)$ n'est autre que l'ensemble des droites vectorielles de l'espace F^{k+1} . Un point $x \in \mathbf{P}^k(F)$ possède ainsi $k + 1$ coordonnées (x_0, \dots, x_k) non toutes nulles — celles d'un vecteur directeur quelconque de la droite correspondante — bien définies à un facteur multiplicatif non nul près. Si (x_0, \dots, x_k) est un élément non nul de F^{k+1} , on notera $[x_0 : \dots : x_k]$ le point correspondant de $\mathbf{P}^k(F)$; nous dirons que (x_0, \dots, x_k) en sont des *coordonnées homogènes*.

Considérons dans ce numéro le cas du corps \mathbf{Q} des nombres rationnels. Soit ainsi x un point de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ — on parle de *point rationnel*. Parmi la multiplicité de ses coordonnées homogènes, on peut en choisir certaines plus particulièrement. Il est en effet loisible de multiplier les x_i par un dénominateur commun ; ce sont alors des entiers relatifs. On les divise alors par leur plus grand diviseur commun, de sorte à obtenir une famille (x_0, \dots, x_k) de coordonnées homogènes formée d'entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble. Observons alors que deux telles familles ne définissent le même point que si elles diffèrent l'une l'autre par multiplication par ± 1 .

Cela montre la correction de la définition suivante :

DÉFINITION 1.1.1. — Soit $x = [x_0 : \dots : x_k]$ un point de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$, dont les coordonnées homogènes sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble. On appelle hauteur exponentielle de x le nombre entier $H(x) = \max(|x_0|, \dots, |x_k|)$. La hauteur logarithmique de x est définie par la formule

$$h(x) = \log H(x) = \log \max(|x_0|, \dots, |x_k|).$$

Les deux notions de hauteurs, exponentielle et logarithmique, ont leur intérêt suivant les contextes. Dans ce texte, nous appellerons tout simplement *hauteur* la hauteur logarithmique.

De la définition résulte immédiatement une propriété de *finitude*, facile mais fondamentale.

PROPOSITION 1.1.2. — *Pour tout nombre réel B , l'ensemble des points de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ de hauteur au plus B est fini.*

Démonstration. — En effet, un tel point est déterminé par le choix de $k + 1$ entiers relatifs (x_0, \dots, x_k) , non tous nuls, et vérifiant $|x_i| \leq e^B$ pour tout i . Il n'y a qu'un nombre fini de telles familles d'entiers, d'où la proposition. \square

Il est en fait possible, voir SCHANUEL (1979), d'établir le comportement asymptotique du nombre $N(B)$ de points de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ de hauteur au plus B — il est commode ici de considérer la hauteur exponentielle. On trouve

$$\text{card}\{x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q}) ; H(x) \leq B\} \simeq \frac{2^k}{\zeta(k+1)} B^{k+1},$$

où ζ désigne la fonction zêta de RIEMANN. On doit à Yuri MANIN d'avoir entrevu comment cette asymptotique peut se généraliser à des variétés plus générales. L'exposant $k + 1$ doit par exemple être interprété comme l'ordre du pôle de la forme différentielle $d(x_1/x_0) \wedge \dots \wedge d(x_k/x_0)$ sur \mathbf{P}^k le long de l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$. Je renvoie à PEYRE (2002) pour une introduction à ce thème.

B. Irrationalité des points prépériodiques

Venons-en maintenant au thème de ces *États de la recherche* et considérons un système dynamique polynomial sur \mathbf{P}^k , c'est-à-dire une application f de \mathbf{P}^k dans lui-même qui applique un point x de coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_k]$ sur le point $f(x)$ dont des coordonnées homogènes sont

$$[f_0(x_0, \dots, x_k) : f_1(x_0, \dots, x_k) : \dots : f_k(x_0, \dots, x_k)],$$

où les f_i sont des polynômes à coefficients dans \mathbf{Q} (pour le moment). Pour que la définition fasse sens et définisse un *endomorphisme de l'espace projectif*, il est nécessaire et suffisant que les polynômes f_i soient *homogènes* de même degré, disons d , et qu'ils n'aient pas de zéro commun dans \mathbf{P}^k . Par là, nous entendons sans zéro commun non seulement dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$, mais aussi dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$, condition bien plus forte. Ils sont alors sans facteur commun. Nous dirons pour abrégé que f est un *endomorphisme de \mathbf{P}^k* et que d est son degré.

PROPOSITION 1.1.3 (Northcott). — *Soit $f : \mathbf{P}^k \rightarrow \mathbf{P}^k$ un endomorphisme de degré d de \mathbf{P}^k . Il existe alors un nombre réel c (ne dépendant que de f) tel que tout point $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ satisfasse les inégalités*

$$dh(x) - c \leq h(f(x)) \leq dh(x) + c.$$

Démonstration. — Il est loisible de multiplier les polynômes f_i par un dénominateur commun de leurs coefficients ; ce sont alors des polynômes à coefficients dans \mathbf{Z} .

Considérons l'énoncé suivant : pour tout polynôme $g \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_k]$, supposé homogène de degré d , il existe un nombre réel $c(g)$ tel que l'on ait

$$(1.1.4) \quad |g(x_0, \dots, x_k)| \leq c(g) \max(|x_0|, \dots, |x_k|)^d$$

pour tout $(x_0, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^{k+1}$. Le cas d'un monôme est évident ; par récurrence sur le nombre de monômes de g , le cas général en résulte grâce à l'inégalité triangulaire.

Soit x un point de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ de coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_k]$, supposées entières et premières entre elles. Le point $f(x)$ a pour coordonnées homogènes la famille $[f_0(x) : \dots : f_k(x)]$. Celles-ci sont entières mais pas forcément premières entre elles ; notons donc δ leur pgcd (supposé ≥ 1). On a alors

$$\begin{aligned} h(f(x)) &= \log \max(|f_0(x)/\delta|, \dots, |f_k(x)/\delta|) \\ &\leq \log \max(|f_0(x)|, \dots, |f_k(x)|) \\ &\leq \log \max(c(f_0), \dots, c(f_k)) + d \log \max(|x_0|, \dots, |x_k|) \\ &\leq c + dh(x), \end{aligned}$$

où $c = \log \max_i c(f_i)$.

L'autre inégalité est plus subtile. Comme les f_i sont sans zéro commun dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$, leur seul zéro commun dans \mathbf{C}^{k+1} est $(0, \dots, 0)$. Un polynôme g sur \mathbf{C}^{k+1} qui s'annule là où les f_i s'annulent simultanément n'est pas nécessairement une combinaison des f_i . Toutefois, le théorème des zéros de HILBERT entraîne que c'est le cas d'une puissance de g :

THÉORÈME 1.1.5 (Théorème des zéros de Hilbert). — *Soit F un corps algébriquement clos, soit P_1, \dots, P_n des polynômes en k variables à coefficients dans F . Soit $P \in F[X_1, \dots, X_k]$ un polynôme qui s'annule en tout point $x = (x_1, \dots, x_k)$ de F^k tel que $P_1(x) = \dots = P_n(x)$. Il existe alors un entier $m \geq 1$ et des polynômes $Q_1, \dots, Q_n \in F_0[X_1, \dots, X_k]$ tels que $P^m = P_1 Q_1 + \dots + P_n Q_n$.*

De plus, si les coefficients des polynômes P, P_1, \dots, P_n appartiennent à un sous-corps F_0 de F , on peut choisir les polynômes Q_i de sorte que leurs coefficients appartiennent à F_0 .

Enfin, si les polynômes P et P_1, \dots, P_n sont homogènes, on peut choisir les polynômes Q_i homogènes.

Démonstration. — La première partie de l'énoncé est le théorème classique dont le lecteur trouvera une démonstration dans tout livre d'algèbre commutative élémentaire.

Les deux ajouts s'en déduisent en considérant une base de F comme F_0 -espace vectoriel et les composantes homogènes des polynômes Q_i . \square

Appliquons ceci aux polynômes X_j , pour $0 \leq j \leq k$. Il existe donc un entier t et des polynômes g_{ij} à coefficients rationnels tels que $X_i^t = \sum_{j=0}^k f_i g_{ij}$. Quitte à ôter de g_{ij} les termes de degrés autres que $t - d$, on peut supposer que chaque g_{ij} est homogène de

degré $t - d$. Soit D un dénominateur commun des coefficients des polynômes g_{ij} . La relation

$$(1.1.6) \quad Dx_i^t = \sum_{i=0}^k f_i(x) Dg_{ij}(x)$$

et l'inégalité (1.1.4) appliquée aux polynômes Dg_{ij} entraîne une majoration de la forme

$$D|x_i|^t \leq c_1 \max(|f_0(x)|, \dots, |f_k(x)|) \max(|x_0|, \dots, |x_k|)^{t-d},$$

où c_1 est un nombre entier. De là en résulte l'inégalité

$$\max(|x_0|, \dots, |x_k|)^t \leq c_2 \max(|f_0(x)|, \dots, |f_k(x)|) \max(|x_0|, \dots, |x_k|)^{t-d}$$

puis

$$d \log \max(|x_0|, \dots, |x_k|) \leq c_3 + \log \max(|f_0(x)|, \dots, |f_k(x)|).$$

Comme les x_i sont premiers entre eux, la relation (1.1.6) implique que le pgcd des $f_j(x)$ divise D . A fortiori, $\delta \leq D$ et

$$dh(x) \leq c_3 + \log D + \log \max(|f_0(x)/\delta|, \dots, |f_k(x)/\delta|) \leq c_4 + h(f(x)),$$

ainsi qu'il fallait démontrer. \square

Après cette démonstration, insistons sur le fait que l'inégalité de gauche — la minoration de la hauteur de l'image de x — a requis le théorème des zéros de HILBERT et donc l'hypothèse que les polynômes f_i sont sans zéro commun dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$. La seule absence de zéro commun dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ n'aurait pas une telle conséquence algébrique et ne permettrait pas d'établir la minoration voulue, voir par exemple l'exercice 2.4.1 du chapitre 2 pour un contre-exemple explicite.

On doit à NORTHCOTT (1950) d'avoir mis en évidence l'importante propriété de finitude énoncée dans la prop. 1.1.2, précisément en vue de la conséquence suivante.

Étant donné un système dynamique $f: X \rightarrow X$ d'un ensemble X , nous dirons qu'un point $x \in X$ est *périodique* pour f s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $f^n(x) = x$, où f^n désigne le n -ième itéré $f \circ \dots \circ f$ de f . Nous dirons qu'un point x est *prépériodique* si l'un de ses itérés est périodique ; cela revient exactement à dire que l'orbite $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ de x est un ensemble fini.

COROLLAIRE 1.1.7 (Northcott). — *Soit $f: \mathbf{P}^k \rightarrow \mathbf{P}^k$ un endomorphisme de degré d à coefficients rationnels. Supposons $d \geq 2$. Il existe un nombre réel $m(f)$ tel que pour tout point x de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ qui est prépériodique pour f , on ait $h(x) \leq m(f)$. En particulier, il n'y a dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ qu'un nombre fini de points prépériodiques pour f .*

Démonstration. — L'encadrement de la prop. 1.1.3 entraîne par récurrence l'inégalité

$$d^n h(x) - c \frac{d^n - 1}{d - 1} \leq h(f^n(x)) \leq d^n h(x) + c \frac{d^n - 1}{d - 1},$$

valable pour tout entier $n \geq 0$ et tout point $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$. Si un point x est prépériodique, son orbite $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ est finie, donc il existe des entiers $n \geq 0$ et $p \geq 1$ tels que $f^n(x) = f^{n+p}(x)$. Posons $y = f^n(x)$. On a donc $f^p(y) = y$ et

$$h(x) \leq \frac{1}{d^n} h(y) + c \frac{1}{d-1} \leq h(y) + c \frac{1}{d-1}.$$

De même,

$$h(y) \leq \frac{1}{d^p} h(f^p(y)) + c \frac{1}{d-1} \leq \frac{1}{d} h(y) + c \frac{1}{d-1},$$

d'où

$$h(y) \leq c \frac{d}{(d-1)^2}.$$

Finalement, la hauteur de tout point prépériodique $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ vérifie

$$h(x) \leq c \frac{2d-1}{(d-1)^2},$$

ce qui démontre le corollaire. \square

On pourra observer que la borne obtenue pour la hauteur d'un point prépériodique est assez explicite. Outre le degré d , elle fait intervenir les coefficients de l'endomorphisme f via la constante c de la proposition 1.1.3. Expliciter cette dernière constante est possible, mais subtil : s'il est évident d'expliciter la majoration fournie par cette proposition, la minoration repose sur l'utilisation du théorème des zéros de Hilbert dont les premières versions effectives n'ont été démontrées que dans la fin des années 1980 (voir TEISSIER (1990) pour un survol de ce problème).

C. Hauteur normalisée

Bien d'autres fonctions que la fonction h introduite ici sont d'une utilité comparable pour l'arithmétique. Notons par exemple que le choix d'un autre système de coordonnées sur l'espace projectif (c'est-à-dire la composition avec une homographie) fournirait une autre fonction hauteur h' , certes telle que $h' - h$ est bornée en vertu de la proposition 1.1.3. La situation des systèmes dynamiques fournit une variante très commode de la hauteur, systématisée par CALL & SILVERMAN (1993) mais dont le principe remonte à NÉRON et TATE.

Avant de continuer, observons l'exemple simple du système dynamique sur \mathbf{P}^1 donné par l'élévation des coordonnées homogènes à la puissance d , autrement dit $f([x_0 : x_1]) = [x_0^d : x_1^d]$, soit encore $f_0 = X_0^d$ et $f_1 = X_1^d$. Les points prépériodiques dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ sont les points $[0 : 1]$, $[1 : 0]$, ainsi que les points de coordonnées homogènes $[1 : \zeta]$, où ζ est une racine de l'unité. Parmi ces points, seuls $[0 : 1]$, $[1 : 0]$, $[1 : 1]$ et $[1 : -1]$ sont rationnels. Observons aussi que l'inégalité reliant $h(x)$ et $h(f(x))$ est dans ce cas une *égalité* :

$$h([x_0^d : x_1^d]) = dh([x_0 : x_1]).$$

En modifiant légèrement la hauteur, nous allons généraliser cette égalité.

PROPOSITION 1.1.8. — Soit $f: \mathbf{P}^k \rightarrow \mathbf{P}^k$ un endomorphisme de l'espace projectif donné par des polynômes homogènes de degré d sans zéro commun dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$. Supposons $d \geq 2$. Il existe alors une unique fonction $\hat{h}: \mathbf{P}^k(\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\hat{h} - h$ soit bornée et telle que $\hat{h}(f(x)) = d\hat{h}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$.

Démonstration. — Munissons l'espace des fonctions bornées de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ dans \mathbf{R} de la norme uniforme et munissons l'espace affine E des fonctions telles que $\varphi - h$ soit bornée de la distance induite. C'est un espace métrique complet. L'application $T: \varphi \mapsto \frac{1}{d}\varphi \circ f$ est linéaire et applique E dans lui-même, car $T(h) - h$ est bornée. Cette application est contractante, de constante de Lipschitz au plus $1/d < 1$. Elle possède donc un unique point fixe dans E . \square

La fonction \hat{h} est appelée *hauteur normalisée*. Notons la formule

$$(1.1.9) \quad \hat{h}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} h(f^n(x)).$$

La démonstration directe de la convergence de la limite permet de donner une démonstration d'apparence un peu plus constructive de la proposition précédente (mais essentiellement identique). La hauteur normalisée vérifie les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1.1.10. — a) on a $\hat{h}(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$;
 b) un point $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ vérifie $\hat{h}(x) = 0$ si et seulement s'il est prépériodique ;
 c) pour tout nombre réel B , l'ensemble des points $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ tels que $\hat{h}(x) \leq B$ est fini.

Démonstration. — La propriété c) résulte immédiatement de la propriété analogue pour h et de ce que $\hat{h} - h$ est bornée. Comme h est positive ou nulle, la propriété a) est manifeste sur la formule (1.1.9) ci-dessus. Elle se déduit aussi, ainsi que la propriété b), de l'assertion de finitude.

Soit en effet $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$. On a $\hat{h}(f^n(x)) = d^n \hat{h}(x)$. Si x est prépériodique, il existe des entiers $n \geq 0$ et $p \geq 1$ tels que $f^n(x) = f^{n+p}(x)$. Par suite, $d^n \hat{h}(x) = d^{n+p} \hat{h}(x)$, d'où $\hat{h}(x) = 0$ car $d \geq 2$. Inversement, si $\hat{h}(x) \leq 0$, les termes de la suite $((f^n(x)))$ forment un ensemble de points de hauteur normalisée négative ou nulle, donc fini d'après c). Il existe donc des entiers $n \geq 0$ et $p \geq 1$ tels que $f^n(x) = f^{n+p}(x)$. Autrement dit, x est prépériodique et $\hat{h}(x) = 0$. \square

Tels qu'énoncés ci-dessus, c'est-à-dire restreints au cas du corps des nombres rationnels, les résultats précédents ne sont pas suffisants. Concernant par exemple les points prépériodiques, ils ne donnent des renseignements que sur ceux qui possèdent un système de coordonnées homogènes rationnelles, et ceux-ci sont en nombre fini d'après le théorème de finitude. Pourtant, ainsi que le montre l'exemple du système dynamique sur \mathbf{P}^1 donné par l'élévation des coordonnées à la puissance d , l'ensemble des points prépériodiques (à coordonnées homogènes complexes, mais en fait algébriques) est infini. Ainsi que nous le verrons plus bas, il est même dense pour la topologie de Zariski (prop. 2.2.1 du chapitre 2). De plus, les énoncés précédents ne concernent que l'espace projectif et il convient d'établir les propriétés générales des hauteurs et d'en dégager les applications aux systèmes dynamiques polynomiaux d'une variété algébrique arbitraire.

§1.2. Hauteur d'un point algébrique

Dans ce paragraphe, j'explique comment définir la hauteur d'un point de l'espace projectif dont un système de coordonnées homogènes est formé de nombres algébriques. Il existe dans la littérature de nombreuses autres présentations, plus ou moins élémentaires, citons notamment LANG (1983); SERRE (1997); HINDRY & SILVERMAN (2000); BOMBIERI & GUBLER (2006).

A. Quelques rappels de théorie algébrique des nombres

Notons $\overline{\mathbf{Q}}$ le corps des nombres algébriques : par définition, c'est l'ensemble des nombres complexes qui sont annulés par un polynôme unitaire à coefficients rationnels. Un tel nombre complexe est annulé par un polynôme unitaire de degré minimal : son polynôme minimal ; ce polynôme est irréductible et son degré est appelé degré du nombre algébrique.

On appellera *corps de nombres* un sous-corps K de \mathbf{C} qui est de dimension finie comme \mathbf{Q} -espace vectoriel ; cette dimension est aussi appelée degré et notée $[K : \mathbf{Q}]$. Un tel corps K est en fait constitué de nombres algébriques (si $x \in K$, le polynôme minimal de l'endomorphisme \mathbf{Q} -linéaire de multiplication par x dans K annule x).

Si a est un nombre algébrique de degré d , le sous-anneau $\mathbf{Q}[a]$ engendré par a dans \mathbf{C} est une \mathbf{Q} -algèbre isomorphe à $\mathbf{Q}[X]/(P)$, où P est le polynôme minimal de a . Par suite, $\mathbf{Q}[a]$ est un \mathbf{Q} -espace vectoriel de dimension d , et aussi un corps. C'est donc un corps de nombres. Plus généralement, si a_1, \dots, a_r sont des nombres algébriques, le sous-corps de \mathbf{C} , $\mathbf{Q}(a_1, \dots, a_r)$, qu'ils engendrent est un corps de nombres. En fait, tout corps de nombres K est de la forme $\mathbf{Q}(a)$ pour un certain élément a (*théorème de l'élément primitif*). Notons P le polynôme minimal de a ; son degré est le degré de K . Comme P est irréductible (et \mathbf{Q} de caractéristique zéro), ses racines complexes sont deux à deux distinctes ; notons-les a_1, \dots, a_D . Ce sont les conjugués de a (qui est l'un d'entre eux).

Pour tout $i \in \{1, \dots, D\}$, il existe un unique homomorphisme de corps $\sigma_i : K \rightarrow \mathbf{C}$ qui applique a sur a_i . En outre, tout homomorphisme de corps de K dans \mathbf{C} est de cette forme. Rappelons si besoin est qu'un tel homomorphisme est injectif ; on dira que c'est un *plongement* de K dans \mathbf{C} . Si L est un sous-corps de K de degré d , chacun des d plongements de L dans \mathbf{C} se prolonge en exactement D/d plongements de K dans \mathbf{C} . (L'entier D/d est égal à la dimension $[K : L]$ de K comme L -espace vectoriel.)

Un entier algébrique est un nombre algébrique qui est annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers ; d'après le *lemme de Gauß*, il revient au même d'exiger que son polynôme minimal soit à coefficients entiers. Notons que si x est une racine du polynôme à coefficients entiers $P = a_0 X^d + \dots + a_d$, avec $a_0 \neq 0$, alors

$$0 = a_0^{d-1} P(x) = (a_0 x)^d + a_0 a_1 (a_0 x)^{d-1} + \dots + a_0^{d-1} a_d,$$

ce qui montre que $a_0 x$ est un entier algébrique. L'ensemble des entiers algébriques est un sous-anneau de $\overline{\mathbf{Q}}$ dont $\overline{\mathbf{Q}}$ est le corps des fractions. Si a_1, \dots, a_r sont des entiers algébriques, le sous-anneau qu'ils engendrent dans \mathbf{C} , $\mathbf{Z}[a_1, \dots, a_r]$, est un \mathbf{Z} -module libre

de rang fini, égal au degré de $\mathbf{Q}(a_1, \dots, a_r)$. Si K est un corps de nombres, l'ensemble des entiers algébriques appartenant à K est de cette forme ; on le notera \mathbf{Z}_K .

Soit K un corps de nombres. La *norme* d'un élément a de K , notée $N_K(a)$, voire $N(a)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur K , est définie comme le déterminant de l'endomorphisme \mathbf{Q} -linéaire de K donné par la multiplication par a . Il y a plusieurs façons de la calculer.

Soit d'abord P le polynôme minimal de a et d son degré. Soit (x_1, \dots, x_r) une base de K vu comme $\mathbf{Q}(a)$ -espace vectoriel. Alors, la famille $(a^i x_j)$, pour $0 \leq i \leq d-1$ et $1 \leq j \leq r$, est une base de K sur \mathbf{Q} . En particulier, $D = dr$. Dans cette base, la multiplication par a est diagonale par blocs, chacun étant la matrice compagnon C_P du polynôme P . On a ainsi $N(a) = (\det C_P)^r$. Le déterminant de C_P est égal au produit des racines complexes de P ; ces racines ne sont autres que les conjugués a_1, \dots, a_d de a . Si (σ_i) , pour $1 \leq i \leq d$, désigne la famille des plongements de $\mathbf{Q}(a)$ dans \mathbf{C} , on a donc

$$N(a) = (a_1 \cdots a_d)^r = \left(\prod_{i=1}^d \sigma_i(a) \right)^r = \prod_{\sigma: K \rightarrow \mathbf{C}} \sigma(a).$$

Supposons de plus que a soit un entier algébrique non nul. Alors, $a\mathbf{Z}_K$ est un sous- \mathbf{Z} -module de rang D de K . D'après le théorème des diviseurs élémentaires, il existe une \mathbf{Z} -base de \mathbf{Z}_K , disons (x_1, \dots, x_D) , et des nombres entiers u_1, \dots, u_D tels que $(u_1 x_1, \dots, u_D x_D)$ soit une \mathbf{Z} -base de $a\mathbf{Z}_K$. Comme le déterminant de la matrice de passage d'une \mathbf{Z} -base de \mathbf{Z}_K à une autre est égal à ± 1 , le déterminant de la multiplication par a est égal au produit $u_1 \dots u_D$, ou à l'opposé. D'autre part, $u_1 \dots u_D$ apparaît comme le cardinal du \mathbf{Z} -module — en fait de l'anneau — quotient $\mathbf{Z}_K / a\mathbf{Z}_K$. D'où la seconde formule,

$$N(a) = \pm \text{card}(\mathbf{Z}_K / a\mathbf{Z}_K).$$

Si I est un idéal non nul de \mathbf{Z}_K , l'anneau quotient \mathbf{Z}_K / I est fini (si $a \in I$, l'anneau \mathbf{Z}_K / I est un quotient de l'anneau $\mathbf{Z}_K / (a)$) ; par définition, son cardinal est appelée la *norme* de I . La formule précédente pour $N(a)$ se généralise en $N(aI) = |N(a)| N(I)$, pour $a \in \mathbf{Z}_K$ et I un idéal de \mathbf{Z}_K .

Si L est un corps de nombres qui contient K et a un élément de K , on a $N_L(a) = N_K(a)^\delta$, où $\delta = [L : K]$ désigne le quotient du degré de L par celui de K . Plus généralement, si I est un idéal non nul de \mathbf{Z}_K , l'idéal $I\mathbf{Z}_L$ de \mathbf{Z}_L est de norme $N_K(I)^\delta$. (Si $I = a_1 \mathbf{Z}_K + \dots + a_r \mathbf{Z}_K$, notons que $I\mathbf{Z}_L = a_1 \mathbf{Z}_L + \dots + a_r \mathbf{Z}_L$.)

B. Définition de la hauteur

Soit x un point de $\mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ et soit $[x_0 : \dots : x_k]$ des coordonnées homogènes de x , où $x_i \in \overline{\mathbf{Q}}$ pour tout i . Soit K un corps de nombres contenant les x_i ; notons D le degré de K et $\sigma_1, \dots, \sigma_D$ les D homomorphismes de K dans \mathbf{C} . Quitte à multiplier les x_i par un même entier naturel non nul, on peut supposer que ce sont des entiers algébriques, donc des éléments de \mathbf{Z}_K . On définit alors la hauteur de x par l'expression

$$(1.2.1) \quad h(x) = -\frac{1}{D} \log N_K(x_0 \mathbf{Z}_K + \dots + x_k \mathbf{Z}_K) + \frac{1}{D} \sum_{j=1}^D \log \max(|\sigma_j(x_0)|, \dots, |\sigma_j(x_k)|).$$

La correction de cette définition dépend de deux vérifications supplémentaires : l'indépendance vis à vis du choix du corps de nombres K et des coordonnées homogènes x_0, \dots, x_k . Notons $h_K(x_0, \dots, x_k)$ le membre de droite de l'équation (1.2.1) et commençons par démontrer qu'il ne dépend pas du choix d'un système de coordonnées homogènes. Si (x'_0, \dots, x'_k) est un second système de coordonnées homogènes définissant le point x , sujettes aux conditions $x'_i \in \mathbf{Z}_K$ pour tout i , il existe un élément $u \in K^*$ tel que $x'_i = ux_i$ pour tout i . Écrivons u comme une fraction a/b d'éléments de \mathbf{Z}_K , on voit que l'on a $bx'_i = ax_i$ pour tout i .

Notons alors que

$$N_K(ax_0\mathbf{Z}_K + \dots + ax_k\mathbf{Z}_K) = |N_K(a)| N_K(x_0\mathbf{Z}_K + \dots + x_k\mathbf{Z}_K)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^D \log \max(|\sigma_j(ax_0)|, \dots, |\sigma_j(ax_k)|) &= \sum_{j=1}^D \log |\sigma_j(a)| + \sum_{j=1}^D \log \max(|\sigma_j(x_0)|, \dots, |\sigma_j(x_k)|) \\ &= \log |N_K(a)| + \sum_{j=1}^D \log \max(|\sigma_j(x_0)|, \dots, |\sigma_j(x_k)|). \end{aligned}$$

Par suite, $h_K(ax_0, \dots, ax_k) = h_K(x_0, \dots, x_k)$. De même, $h_K(bx'_0, \dots, bx'_k) = h_K(x'_0, \dots, x'_k)$, d'où l'indépendance par rapport au choix des coordonnées homogènes.

La démonstration de l'indépendance de la hauteur par rapport au choix du corps de nombres est plus simple. Si K et K' sont des corps de nombres contenant chacun un système de coordonnées homogènes du point x , le corps L engendré par ces deux corps en est un également, qui contient à la fois K et K' .

Soit E le degré de L ; c'est un multiple de D . De fait, la restriction à K d'un homomorphisme $\sigma: L \rightarrow \mathbf{C}$ est un plongement de K dans \mathbf{C} et chacun des D plongements de K dans \mathbf{C} s'étend d'exactly E/D manières distinctes en un plongement de L dans \mathbf{C} . Par conséquent, dans la formule définissant $h_L(x_0, \dots, x_k)$, la somme

$$\sum_{\sigma: L \rightarrow \mathbf{C}} \log \max(|\sigma(x_0)|, \dots, |\sigma(x_k)|)$$

reprend E/D fois chaque terme de la somme correspondante sur le corps K . Compte tenu des facteurs de normalisation $1/D$ et $1/E$, ces parties des deux formules donnent le même résultat. La démonstration de l'égalité $h_K(x_0, \dots, x_k) = h_L(x_0, \dots, x_k)$ est donc déterminée, compte tenu de l'égalité de normes d'idéaux

$$N_L(x_0\mathbf{Z}_L + \dots + x_k\mathbf{Z}_L) = N_K(x_0\mathbf{Z}_K + \dots + x_k\mathbf{Z}_K)^{E/D}.$$

Une conséquence de la formule définissant la hauteur est son invariance sous l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. On définit en effet une action de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur $\mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$ en posant $\tau(x) = [\tau(x_0) : \dots : \tau(x_k)]$ pour tout point $x \in \mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$, de coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_k]$ dans $\overline{\mathbf{Q}}$, et tout élément $\tau \in \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$.

PROPOSITION 1.2.2. — *Pour tout $x \in \mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ et tout automorphisme $\tau \in \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, on a $h(\tau(x)) = h(x)$.*

Démonstration. — Soit x un point de $\mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ et soit K une extension galoisienne de \mathbf{Q} contenant un système $[x_0 : \cdots : x_k]$ de coordonnées homogènes de x . Par définition, K est stable par tout automorphisme $\tau \in \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ et $\tau|_K$ est un automorphisme de K , ainsi que de son anneau d'entiers \mathbf{Z}_K . Il en résulte que l'idéal $x_0\mathbf{Z}_K + \cdots + x_k\mathbf{Z}_K$ a même norme que son image $\tau(x_0)\mathbf{Z}_K + \cdots + \tau(x_k)\mathbf{Z}_K$ par τ . De même, les plongements de K dans \mathbf{C} sont tous obtenus par composition d'un plongement fixe par les éléments de $\text{Gal}(K/\mathbf{Q})$. Par conséquent, les termes des sommes

$$\sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \max(|\sigma(x_0)|, \dots, |\sigma(x_k)|) \quad \text{et} \quad \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \max(|\sigma(\tau(x_0))|, \dots, |\sigma(\tau(x_k))|)$$

ne diffèrent que par l'ordre. La proposition en résulte. \square

Les paragraphes suivants donnent des variantes de la définition de la hauteur, ainsi que des exemples.

C. Propriété de Bézout pour les nombres algébriques

Il n'est pas vrai que l'anneau des nombres algébriques $\overline{\mathbf{Z}}$ soit un anneau principal. Ce n'est en effet même pas un anneau noethérien : l'idéal I de $\overline{\mathbf{Z}}$ formé des éléments dont une puissance est un multiple de 2 n'est par exemple pas de type fini. Montrons par l'absurde qu'il n'est pas principal : soit $a \in I$ tel que $I = (a)$. Comme $2^{1/m} \in I$, $2^{1/m}$ est multiple de a . Comme $2^{(m-1)/m} = 2/2^{1/m}$ n'est pas multiple de 2 dans $\overline{\mathbf{Z}}$, a^{m-1} n'est pas multiple de 2. Comme m est arbitraire, aucune puissance de a n'est multiple de 2, ce qui est absurde.

En revanche, il est vrai que les idéaux de type fini de $\overline{\mathbf{Z}}$ sont principaux (ce qu'on résume parfois en disant que $\overline{\mathbf{Z}}$ a la propriété de Bézout). Cela se déduit facilement de ce que le groupe des classes d'idéaux d'un anneau d'entiers de corps de nombres est de torsion. Par suite, quitte à considérer une extension convenable L de K , on peut choisir les coordonnées homogènes $[x_0 : \cdots : x_k]$ d'un point x de $\mathbf{P}^k(K)$ comme suit : ce sont des éléments de \mathbf{Z}_L et l'idéal $x_0\mathbf{Z}_L + \cdots + x_k\mathbf{Z}_L$ de \mathbf{Z}_L est égal à \mathbf{Z}_L . Dans la formule (1.2.1), cela fait disparaître le premier terme.

D. Valuations et hauteurs

Les idéaux d'un anneau d'entiers de corps de nombres ne sont pas toujours faciles à manipuler, notamment parce qu'ils ne sont pas nécessairement principaux. Le premier terme de la hauteur qui met en jeu la norme d'un idéal est parfois malcommode. Dans ce paragraphe, nous l'écrivons comme une somme de termes formellement analogues au second terme, mais où apparaissent d'autres corps que le corps des nombres complexes.

DÉFINITION 1.2.3. — *Soit F un corps. Une valeur absolue sur F est une application $|\cdot| : F \rightarrow \mathbf{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes : pour tous a et b dans F ,*

- a) $|ab| = |a||b|$ (multiplicativité);
- b) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (inégalité triangulaire);
- c) $|a| = 0$ équivaut à $a = 0$.

Pour la théorie algébrique des nombres, la classification des valeurs absolues sur \mathbf{Q} est d'une importance capitale. Donnons-en des exemples. Il y a déjà la restriction à \mathbf{Q} de la valeur absolue usuelle. qu'on note parfois $|\cdot|_\infty$ pour la distinguer de celles que je vais bientôt définir. Notons que cette valeur absolue $|\cdot|_\infty$ est *archimédienne*, car pour tout $a \in \mathbf{Q}^*$ et tout $M > 0$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $|na|_\infty > M$ (axiome d'Archimède).

D'autre part, soit p un nombre premier. Tout nombre rationnel non nul a s'écrit de manière unique sous la forme $p^n u$, avec $n \in \mathbf{Z}$, et $u \in \mathbf{Q}$ le quotient de deux entiers relatifs premiers à p . Posons alors $|a|_p = p^{-n}$. Posons aussi, comme il se doit, $|0|_p = 0$. Cela définit une valeur absolue sur \mathbf{Q} que l'on appelle la *valeur absolue p -adique*. Seule l'inégalité triangulaire n'est pas évidente ; écrivons donc $a = p^n \frac{a'}{a''}$ et $b = p^m \frac{b'}{b''}$, avec $n, m \in \mathbf{Z}$, a', a'', b', b'' des nombres entiers relatifs premiers à p . Supposons aussi, ce qui est loisible, $n \leq m$. Alors,

$$a + b = p^n \left(\frac{a'}{a''} + p^{m-n} \frac{b'}{b''} \right) = p^n \frac{a'b'' + p^{m-n} b'a''}{a''b''}.$$

Dans cette dernière fraction, le dénominateur est premier à p , mais pas forcément le numérateur. Par suite, $a + b$ s'écrit sous la forme $p^s \frac{c'}{c''}$ avec $s \geq n$ et

$$|a + b|_p = p^{-s} \leq p^{-n} = \max(p^{-n}, p^{-m}) = \max(|a|_p, |b|_p).$$

Ainsi, $|\cdot|_p$ vérifie une inégalité plus forte que l'inégalité triangulaire : on dit que c'est une *valeur absolue ultramétrique*. En particulier, pour tout $a \in \mathbf{Q}$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|na|_p \leq |a|_p$: cete valuation ne vérifie pas l'axiome d'Archimède.

THÉOREME 1.2.4 (Ostrowski). — *Les valeurs absolues sur le corps \mathbf{Q} des nombres rationnels sont les suivantes :*

- la valeur absolue dite triviale pour laquelle $|0| = 0$ et $|a| = 1$ si $a \neq 0$;
 - pour tout nombre réel s tel que $0 < s \leq 1$, la puissance $|\cdot|_\infty^s$ de la valeur absolue archimédienne ;
- et, pour tout nombre premier p ,
- pour tout nombre réel $s > 0$, la puissance $|\cdot|_p^s$ de la valeur absolue p -adique.

Une valeur absolue sur un corps définit une distance et donc une topologie. Deux valeurs absolues définissent la même topologie si et seulement si l'une est une puissance (non nulle) de l'autre. La valeur absolue triviale fournit la topologie discrète. Par suite, dans la liste ci-dessus, on ne s'intéressera qu'aux valeurs absolues p -adiques standard et à la valeur absolue archimédienne standard. Elles sont reliées par la *formule du produit*, qui n'est autre qu'une reformulation de la décomposition en facteurs premiers.

PROPOSITION 1.2.5. — *Pour tout $a \in \mathbf{Q}^*$, $|a|_\infty \prod_p |a|_p = 1$.*

Démonstration. — Soit $a = \varepsilon \prod_p p^{n_p}$ la décomposition en facteurs premiers de a , avec $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ et $n_p \in \mathbf{Z}$ pour tout nombre premier p , presque tous étant nuls. Alors, pour tout nombre premier p , on a $|a|_p = p^{-n_p}$, tandis que $|a|_\infty = \prod_p p^{n_p}$. Le produit de toutes ces quantités est bien égal à 1. \square

Fixons une valeur absolue $|\cdot|$ sur \mathbf{Q} . Si K est un corps de nombres, il y a en général plusieurs façons d'étendre la valeur absolue donnée en une valeur absolue sur \mathbf{Q} . Prenons par exemple la valeur absolue archimédienne et le corps $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$. Du point de vue algébrique, indépendamment de l'ordre usuel sur les nombres réels, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont indissociables ; on peut donc prolonger la valeur absolue de deux façons différentes, en posant $|a + b\sqrt{2}|'_\infty = |a + b\sqrt{2}|$ ou $|a + b\sqrt{2}|''_\infty = |a - b\sqrt{2}|$, pour a et b dans \mathbf{Q} .

Toujours dans le cas de la valeur absolue archimédienne, mais dans le cas d'un corps de nombres K général, les différentes extensions à K de la valeur absolue archimédienne de \mathbf{Q} correspondent exactement aux valeurs absolues $|\cdot|_\sigma$ définies par $|a|_\sigma = |\sigma(a)|$, où σ parcourt l'ensemble des plongements de K dans \mathbf{C} . (Deux plongements conjugués définissent la même valeur absolue.)

Dans le cas des valeurs absolues p -adiques, un corps, que l'on note \mathbf{C}_p , joue le même rôle que \mathbf{C} pour la valeur absolue archimédienne. Observons que \mathbf{R} est le complété du groupe abélien \mathbf{Q} pour la topologie définie par la valeur absolue archimédienne, qu'il est muni d'une valeur absolue (celle que tout le monde connaît, la seule qui étend celle de \mathbf{Q}) et que \mathbf{C} est sa clôture algébrique, munie de l'*unique* valeur absolue qui étend la valeur absolue archimédienne sur \mathbf{R} .

Si p est un nombre premier, on commence par définir le complété \mathbf{Q}_p de \mathbf{Q} pour la topologie définie par la valeur absolue p -adique. C'est un corps et sa topologie est compatible avec la structure de corps. Ensuite, on considère une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}_p}$ de \mathbf{Q}_p : comme \mathbf{Q}_p est complet, on démontre que $\overline{\mathbf{Q}_p}$ possède une *unique* valeur absolue, toujours notée $|\cdot|_p$ qui étend la valeur absolue p -adique sur \mathbf{Q} . Ce corps n'est cependant pas complet pour la topologie p -adique — on note alors \mathbf{C}_p son complété muni de la valeur absolue $|\cdot|_p$ qui étend la valeur absolue p -adique. C'est un corps complet par construction, et algébriquement clos par théorème.

Si K est un corps de nombres, les extensions à K de la valeur absolue p -adique sur \mathbf{Q} sont de la forme $a \mapsto |\sigma(a)|_p$, où σ décrit l'ensemble des plongements de K dans \mathbf{C}_p . (L'image d'un tel plongement est bien sûr contenue dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$ et deux plongements qui diffèrent par composition d'un automorphisme de $\overline{\mathbf{Q}_p}$ fournissent la même valeur absolue.)

PROPOSITION 1.2.6. — *Soit K un corps de nombres et soit $x \in \mathbf{P}^k(K)$ un point de coordonnées homogènes $[x_0 : \cdots : x_k]$ (appartenant à K). Alors,*

$$(1.2.7) \quad h(x) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{p \leq \infty} \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \max(|\sigma(x_0)|_p, \dots, |\sigma(x_k)|_p).$$

La sommation sur « $p \leq \infty$ » signifie que l'on somme sur les nombres premiers p et sur un symbole supplémentaire ∞ , avec $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{C}$. Dans la formule précédente, on peut aussi regrouper les termes selon les valeurs absolues induites sur le corps K par les plongements qui indexent cette somme.

Notons ainsi M_K l'ensemble des valeurs absolues sur K qui étendent une des valeurs absolues p -adique ou archimédienne sur K . Un élément de M_K est appelé *place* du

corps K . Pour chaque valeur absolue $|\cdot|_v \in M_K$, soit p_v le nombre premier ou l'infini correspondant à la valeur absolue induite sur le sous-corps \mathbf{Q} de K et soit ε_v le nombre de plongements σ de K dans \mathbf{C}_{p_v} induisant cette valeur absolue sur K , autrement dit tels que l'on ait $|x|_v = |\sigma(x)|_{p_v}$ pour tout $x \in K$.

Avec les notations de la proposition, on a ainsi

$$(1.2.8) \quad h(x) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{v \in M_K} \varepsilon_v \log \max(|x_0|_v, \dots, |x_k|_v).$$

Sous-jacent à la véracité de la formule précédente est le fait que le membre de droite ne dépend pas du choix des coordonnées homogènes définissant le point. De même que l'énoncé analogue avec la première définition de la hauteur découlait d'une relation entre la norme d'un élément et ses valeurs absolues archimédiennes, cela résulte de la *formule du produit* qui relie toutes les valeurs absolues d'un élément non nul d'un corps de nombres : pour tout $a \in K^*$,

$$(1.2.9) \quad \prod_{v \in M_K} |a|_v^{\varepsilon_v} = \prod_{p \leq \infty} \prod_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} |\sigma(a)|_p = 1.$$

En fait, le facteur indexé par p dans l'équation précédente est donné par

$$\prod_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} |\sigma(a)|_p = |N_K(a)|_p,$$

où $N_K(a)$ est la norme de a . Cela ramène la formule du produit dans le corps de nombres K à celle, déjà mentionnée (prop. 1.2.5), dans le corps des nombres rationnels.

E. Mesure de Mahler et hauteur

Considérons ici le cas de la droite projective \mathbf{P}^1 . Notons ∞ le point de coordonnées homogènes $[0 : 1]$. Un point x de $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ a deux coordonnées homogènes $[x_0 : x_1]$; si $x \neq \infty$, $x_0 \neq 0$ et $\xi = x_1/x_0$ est un élément de $\overline{\mathbf{Q}}$. Dire que $x \in \mathbf{P}^1(K)$, pour un sous-corps K de \mathbf{C} , signifie exactement que $\xi \in K$.

La hauteur du point ∞ est égale à 0. Si ξ est un nombre algébrique, on note (abusivement) $h(\xi)$ la hauteur du point $[1 : \xi]$ et on dit aussi que c'est la hauteur de ξ . Montrons comment elle est reliée au polynôme minimal de ξ . Il nous faut tout d'abord rappeler une définition : La *mesure de Mahler* d'un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ est donnée par la formule

$$(1.2.10) \quad M(P) = \exp \left(\int_0^1 \log |P(e^{2i\pi t})| dt \right).$$

PROPOSITION 1.2.11. — *Soit ξ un nombre algébrique, soit P son polynôme minimal et soit d son degré. On a*

$$h(\xi) = \frac{1}{d} \log M(P).$$

Démonstration. — Par définition

$$h(\xi) = h([1 : \xi]) = \frac{1}{d} \sum_{p \leq \infty} \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \max(1, |\sigma(\xi)|_p),$$

où la somme est sur l'ensemble des nombres premiers et le symbole ∞ ; notons $h_p(\xi)$ la somme correspondante, de sorte que $h(\xi) = \sum_{p \leq \infty} h_p(\xi)$. Posons aussi $P = a_0 X^d + a_1 X^{d-1} + \dots + a_d$.

Nous allons d'abord montrer que pour tout nombre premier p , on a $h_p(\xi) = -d \log |a_0|_p$. Notons en effet ξ_1, \dots, ξ_d les racines de P dans \mathbf{C}_p . Ce ne sont autres que les images de ξ par les différents plongements du corps $\mathbf{Q}(\xi)$ dans \mathbf{C}_p . Supposons, ce qui est loisible, que $|\xi_1|_p \geq |\xi_2|_p \geq \dots \geq |\xi_d|_p$ et soit r le plus grand entier tel que $|\xi_r|_p \geq 1$. Les relations coefficients-racines s'écrivent

$$\frac{a_k}{a_0} = (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}$$

et entraînent la majoration

$$\left| \frac{a_k}{a_0} \right|_p \leq |\xi_1|_p \dots |\xi_k|_p \leq \prod_{i=1}^d \max(1, |\xi_i|_p),$$

autrement dit

$$|a_k|_p \leq |a_0|_p \prod_{i=1}^d \max(1, |\xi_i|_p).$$

Pour $k = r$, remarquons que dans l'expression

$$\frac{a_r}{a_0} = (-1)^r \sum_{i_1 < \dots < i_r} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_r},$$

le terme $\xi_1 \dots \xi_r$ est de valeur absolue strictement supérieure à tous les autres; l'inégalité ultramétrique entraîne alors

$$\left| \frac{a_r}{a_0} \right|_p = |\xi_1|_p \dots |\xi_r|_p = \prod_{i=1}^d \max(1, |\xi_i|_p).$$

Par suite,

$$\max(|a_0|_p, \dots, |a_d|_p) = \max(|a_0|_p, |a_r|_p) = |a_0|_p \prod_{i=1}^d \max(1, |\xi_i|_p).$$

Enfin, comme les coefficients a_0, \dots, a_d sont premiers entre eux, l'un d'entre eux n'est pas multiple de p et le membre de gauche de l'égalité précédente est égal à 1. Ainsi,

$$h_p(\xi) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \log \max(1, |\xi_i|_p) = -\frac{1}{d} \log |a_0|_p.$$

Passons maintenant au terme h_∞ . D'après la formule de JENSEN, on a, pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$,

$$\int_0^1 \log |e^{2i\pi t} - \alpha|_\infty dt = \log \max(1, |\alpha|_\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\alpha|_\infty \leq 1; \\ \log |\alpha|_\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\log M(P) = \log |a_0|_\infty + \sum_{j=1}^d \log \max(1, |\xi_j|_\infty) = \log |a_0|_\infty + d h_\infty(\xi).$$

On a donc finalement

$$dh(\xi) = - \sum_{p \leq \infty} \log |a_0|_p + \log M(P) = \log M(P)$$

compte tenu de la formule du produit (prop. 1.2.5). \square

§1.3. Fonctorialité

Ce paragraphe explique le comportement de la hauteur sous l'effet d'un morphisme.

A. Exemples

Commençons par des exemples très simples.

Soit $S: \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^m \rightarrow \mathbf{P}^{km+k+m}$ le plongement de Segre, associant au couple (x, y) de points de coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_k]$ et $[y_0 : \dots : y_m]$ le point de \mathbf{P}^{km+k+m} dont un système de coordonnées homogènes est la famille $(x_i y_j)$, indexée par l'ensemble des couples (i, j) tels que $0 \leq i \leq k$ et $0 \leq j \leq m$, disons ordonné par l'ordre lexicographique.

Pour toute valeur absolue $|\cdot|$ sur un corps F , tout $(x_0, \dots, x_k) \in F^{k+1}$ et tout $(y_0, \dots, y_m) \in F^{m+1}$, on a évidemment

$$\max_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq m}} |x_i y_j| = \max_{0 \leq i \leq k} |x_i| \max_{0 \leq j \leq m} |y_j|.$$

La définition de la hauteur par la formule (1.2.7) entraîne alors l'égalité

$$(1.3.1) \quad h(S(x, y)) = h(x) + h(y), \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}}) \text{ et tout } y \in \mathbf{P}^m(\overline{\mathbf{Q}}).$$

Le plongement de Veronese de degré d , $V_d: \mathbf{P}^k \rightarrow \mathbf{P}^K$, associe à un point x de coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_k]$ le point $V_d(x)$ dont un système de coordonnées homogènes est donné par la famille des monômes $x_0^{d_0} \dots x_k^{d_k}$, où (d_0, \dots, d_k) parcourt toutes les suites d'entiers naturels de somme d . Il y a $\binom{k+d}{k}$ telles suites, d'où $K = \binom{k+d}{k} - 1$. Pour toute valeur absolue sur un corps F et tout $(x_0, \dots, x_k) \in F^{k+1}$, on a

$$|x_0^{d_0} \dots x_k^{d_k}| = |x_0|^{d_0} \dots |x_k|^{d_k} \leq \max(|x_0|, \dots, |x_k|)^d,$$

l'égalité étant atteinte lorsque $d_r = d$ et $|x_r|$ maximal. On a ainsi

$$(1.3.2) \quad h(V_d(x)) = dh(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}}).$$

Considérons enfin la projection linéaire $p: \mathbf{P}^k \dashrightarrow \mathbf{P}^m$ qui applique un point x de coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_k]$ sur le point $p(x)$ de coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_m]$, m et k étant des entiers tels que $1 \leq m < k$. Son domaine de définition est exactement le complémentaire du sous-espace projectif E défini par l'annulation des $m+1$ premières coordonnées homogènes. Pour $x \notin E$, l'inégalité évidente

$$\max(|x_0|, \dots, |x_m|) \leq \max(|x_0|, \dots, |x_k|)$$

entraîne l'inégalité

$$(1.3.3) \quad h(p(x)) \leq h(x) \quad \text{pour tout } x \in (\mathbf{P}^k \setminus E)(\overline{\mathbf{Q}}).$$

En revanche, notons qu'il n'y a pas d'inégalité dans l'autre sens. Par exemple, considérons la projection p de \mathbf{P}^2 dans \mathbf{P}^1 donnée par $p([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 : x_1]$; pour $x = [1 : 0 : n]$, avec $n \in \mathbf{Z}^*$, on a $h(x) = \log|n|$ et $h(p(x)) = h([1 : 0]) = 0$.

B. Comportement par morphisme

PROPOSITION 1.3.4. — Soit $f: \mathbf{P}^k \dashrightarrow \mathbf{P}^m$ une application rationnelle définie par $m+1$ polynômes (f_0, \dots, f_m) en $k+1$ variables, à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}$ homogènes de degré d et sans facteur commun. Notons Z le lieu d'indétermination de f , lieu des zéros communs dans \mathbf{P}^k des polynômes f_0, \dots, f_m .

- a) Il existe un nombre réel c_1 tel que pour tout $x \in (\mathbf{P}^k \setminus Z)(\overline{\mathbf{Q}})$, $h(f(x)) \leq dh(x) + c_1$.
- b) Pour toute sous-variété fermée X de \mathbf{P}^k qui ne rencontre pas Z , il existe un nombre réel c_X tel que $h(f(x)) \geq dh(x) - c_X$ pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$.

Démonstration. — Démontrons d'abord a).

Observons d'abord le lemme suivant : soit F un corps muni d'une valeur absolue et soit φ un polynôme homogène de degré d à coefficients dans F . Il existe un nombre réel C tel que pour tout corps valué K contenant F et dont la valuation prolonge celle de F et toute famille (x_0, \dots, x_k) d'éléments de K ,

$$|\varphi(x_0, \dots, x_k)| \leq C \max(|x_0|, \dots, |x_k|)^d.$$

Cela est évident pour un monôme et s'en déduit, grâce à l'inégalité triangulaire, par récurrence sur le nombre de monômes de φ . Si la valeur absolue $|\cdot|$ est ultramétrique, on peut en outre choisir pour C le maximum des valeurs absolues des coefficients des monômes qui constituent φ .

Soit maintenant F un corps de nombres contenant les coefficients des polynômes f_i . Quitte à multiplier les polynômes f_i par un même entier non nul, on peut en outre supposer que les coefficients des f_i sont des entiers algébriques. Par conséquent, pour tout nombre premier p , les valeurs absolues p -adiques de ces coefficients sont au plus 1 et l'on aura, pour tout corps de nombres K contenant F , tout nombre premier p , tout plongement $\sigma: K \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ et tout $x = (x_0, \dots, x_k) \in K^{k+1}$, l'inégalité

$$\max(|\sigma(f_0(x))|_p, \dots, |\sigma(f_m(x))|_p) \leq \max(|\sigma(x_0)|_p, \dots, |\sigma(x_k)|_p)^d.$$

Pour les valeurs absolues archimédiennes, il existe de même, pour tout plongement $\sigma_0: F \hookrightarrow \mathbf{C}$ un nombre réel $C_{\sigma_0} > 0$ tel que l'on ait

$$\max(|\sigma(f_0(x))|_\infty, \dots, |\sigma(f_m(x))|_\infty) \leq C_{\sigma_0} \max(|\sigma(x_0)|_\infty, \dots, |\sigma(x_k)|_\infty)^d$$

pour tout corps de nombres K qui contient F , tout plongement $\sigma: K \hookrightarrow \mathbf{C}$ qui prolonge σ_0 et tout élément $(x_0, \dots, x_k) \in K^{k+1}$.

Soit K un corps de nombres contenant F et soit x un point de $\mathbf{P}^k(K)$; choisissons-lui un système de coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_k]$ dans K . Supposons que f soit défini en x , c'est-à-dire que $f_0(x), \dots, f_m(x)$ ne soient pas tous nuls. La définition de la

hauteur implique alors la majoration

$$\begin{aligned}
h(f(x)) &= h([f_0(x) : \cdots : f_m(x)]) \\
&= \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{p \leq \infty} \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \max(|\sigma(f_0(x))|_p, \dots, |\sigma(f_m(x))|_p) \\
&\leq \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{p \leq \infty} \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} d \log \max(|\sigma(x_0)|_p, \dots, |\sigma(x_k)|_p) \\
&\quad + \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} (\log C_{\sigma|_F} + d \log \max(|\sigma(x_0)|_\infty, \dots, |\sigma(x_k)|_\infty)) \\
&\leq dh([x_0 : \cdots : x_k]) + \max_{\sigma : F \hookrightarrow \mathbf{C}} \log C_\sigma.
\end{aligned}$$

L'assertion *a*) ainsi démontrée, passons à la seconde partie de la proposition. Soit (P_j) une famille de polynômes homogènes à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}$ définissant la sous-variété X . La sous-variété de \mathbf{P}^k définie par les polynômes P_j d'une part et f_0, \dots, f_m d'autre part est égale à $X \cap Z$, donc est vide. D'après le théorème des zéros de Hilbert, dans sa version homogène, l'idéal (P_j, f_i) engendré par ces polynômes contient une puissance de l'idéal (X_0, \dots, X_k) . Il existe ainsi un entier t et, pour tout $n \in \{0, \dots, k\}$ des polynômes G_{jn} et H_{in} tels que

$$X_n^t = \sum_j P_j G_{jn} + \sum_{i=0}^m f_i H_{in}.$$

Il est loisible de supposer les polynômes G_{jn} et H_{in} homogènes, quitte à ne conserver que les monômes de G_{jn} de degré $t - \deg(P_j)$ et ceux de H_{in} de degré $t - d$.

Pour tout point $x = [x_0 : \cdots : x_k]$ de $X(\overline{\mathbf{Q}})$, on a alors

$$x_n^t = \sum_j P_j(x) G_{jn}(x) + \sum_{i=0}^m f_i(x) H_{in}(x) = \sum_{i=0}^m f_i(x) H_{in}(x)$$

puisque, par hypothèse, $P_j(x) = 0$ pour tout j . Soit N un nombre entier non nul tel que les coefficients des polynômes NH_{in} soient entiers algébriques, éléments d'un corps de nombres F contenant aussi les coefficients des f_i .

Par un argument similaire au *a*), on en déduit que pour tout corps de nombres K contenant F , tout nombre premier p , tout plongement σ de K dans \mathbf{C}_p , et tout point $[x_0 : \cdots : x_k] \in X(F)$, on ait la majoration

$$|N\sigma(x_n)|_p^t \leq \max(|\sigma(f_0(x))|_p, \dots, |\sigma(f_m(x))|_p) \max_{i,n}(|\sigma(H_{in}(x))|_p).$$

Alors,

$$|N|_p |\sigma(x_n)|_p^t \leq \max(|\sigma(f_0(x))|_p, \dots, |\sigma(f_m(x))|_p) \max(|\sigma(x_0)|, \dots, |\sigma(x_n)|)^{t-d},$$

d'où une majoration

$$\max(|\sigma(x_0)|_p, \dots, |\sigma(x_n)|_p)^d \leq |N|_p^{-1} \max(|\sigma(f_0(x))|_p, \dots, |\sigma(f_m(x))|_p).$$

Pour les valeurs absolues archimédiennes, il existe de même un nombre réel $C > 0$ tel que

$$\max(|\sigma(x_0)|_\infty, \dots, |\sigma(x_n)|_\infty)^d \leq C |N|_\infty^{-1} \max(|\sigma(f_0(x))|_\infty, \dots, |\sigma(f_m(x))|_\infty),$$

pour tout corps de nombres K contenant F , tout point $x = [x_0 : \dots : x_k] \in X(K)$ et tout plongement de K dans \mathbf{C}

Mettant bout à bout ces inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} dh([x_0 : \dots : x_k]) &\leq \log C + \sum_{p \leq \infty} \log |N|_p^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{p \leq \infty} \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \max(|\sigma(f_0(x))|_p, \dots, |\sigma(f_m(x))|_p). \end{aligned}$$

Autrement dit, $dh(x) \leq \log C + h(f(x))$, ainsi qu'il fallait démontrer. \square

C. Hauteurs, plongements, fibrés en droites

Considérons maintenant une variété projective X , définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$. À tout plongement φ de X dans un espace projectif \mathbf{P}^k est associée une fonction hauteur sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$, définie par $h_\varphi(x) = h_{\mathbf{P}^k}(\varphi(x))$ pour $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$, où $h_{\mathbf{P}^k}$ désigne la hauteur sur $\mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ construite précédemment. Cette définition ne requiert que le fait que φ soit une application régulière et s'étend donc *verbatim* aux morphismes φ de X dans un espace projectif. En fait, nous allons voir que h_φ ne dépend essentiellement que du fibré en droites $\varphi^* \mathcal{O}(1)$ sur X déduit du fibré tautologique $\mathcal{O}(1)$ sur l'espace projectif.

LEMME 1.3.5. — *Soit X une variété projective définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Soit $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}^k$ et $\psi : X \rightarrow \mathbf{P}^m$ des morphismes de X dans des espaces projectifs. Si $\varphi^* \mathcal{O}(1)$ et $\psi^* \mathcal{O}(1)$ sont isomorphes, la différence $h_\varphi - h_\psi$ des hauteurs associées à φ et ψ est une fonction bornée sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$.*

Démonstration. — Notons \mathcal{L} le fibré en droites $\varphi^* \mathcal{O}(1)$; par construction, il est engendré par ses sections globales et définit un morphisme α de X dans l'espace projectif \mathbf{P}^s associé à une base de l'espace vectoriel de ses sections globales — c'est le morphisme fourni par le système linéaire complet associé à \mathcal{L} . Il existe alors des applications rationnelles définies par des polynômes homogènes de degré 1, $\varphi' : \mathbf{P}^s \dashrightarrow \mathbf{P}^k$ et $\psi' : \mathbf{P}^s \dashrightarrow \mathbf{P}^m$ telles que $\varphi = \varphi' \circ \alpha$ et $\psi = \psi' \circ \alpha$. En outre, le lieu d'indétermination de φ' et ψ' ne rencontre pas $\alpha(X)$. (De manière équivalente, les images réciproques par φ et ψ du système linéaire des hyperplans de \mathbf{P}^k , resp. \mathbf{P}^m , sont, par définition de \mathcal{L} , des sous-systèmes linéaires de celui associé à \mathcal{L} , et sont sans point-base.) D'après la prop. 1.3.4, la fonction $h_{\mathbf{P}^s} - h_{\mathbf{P}^k} \circ \varphi'$ est bornée sur $\alpha(X)(\overline{\mathbf{Q}})$, de même que la fonction $h_{\mathbf{P}^s} - h_{\mathbf{P}^m} \circ \psi'$. Par conséquent,

$$h_\varphi - h_\psi = h_{\mathbf{P}^k} \circ \varphi' \circ \alpha - h_{\mathbf{P}^m} \circ \psi' \circ \alpha$$

est bornée sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$. \square

Soit \mathcal{F} l'espace vectoriel des fonctions de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ dans \mathbf{R} et soit \mathcal{F}_b son sous-espace vectoriel constitué des fonctions bornées. Notons $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des morphismes de X dans un espace projectif et $\text{Pic}(X)$ le groupe abélien des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur X .

À $\varphi \in \mathcal{M}(X)$, nous pouvons associer d'une part la fonction h_φ , ou plutôt sa classe $[h_\varphi]$ modulo \mathcal{F}_b , et d'autre part la classe d'isomorphisme $[\varphi^* \mathcal{O}(1)]$ du fibré en droites $\varphi^* \mathcal{O}(1)$ sur X . D'après le lemme ci-dessus, $[h_\varphi]$ ne dépend que de $[\varphi^* \mathcal{O}(1)]$. Plus précisément, on a le théorème :

THÉOREME 1.3.6. — *Il existe un unique homomorphisme de groupes η de $\text{Pic}(X)$ dans $\mathcal{F} / \mathcal{F}_b$, noté $\mathcal{L} \mapsto \eta_{\mathcal{L}}$, qui, pour tout morphisme φ de X dans un espace projectif, applique la classe d'isomorphisme du fibré en droites $\varphi^* \mathcal{O}(1)$ sur la classe de la fonction h_φ modulo l'espace \mathcal{F}_b des fonctions bornées sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$.*

Démonstration. — Un tel homomorphisme est prescrit sur les classes de fibrés en droites de la forme $\varphi^* \mathcal{O}(1)$, où φ est un morphisme, *a fortiori* sur les fibrés en droites très amples qui, par définition même, sont de cette forme en prenant pour φ un plongement. Comme tout élément de $\text{Pic}(X)$ est la différence de deux classes de fibrés en droites très amples, il n'y a au plus qu'un tel homomorphisme.

Notons $\text{Pic}^+(X)$ le sous-monoïde de $\text{Pic}(X)$ formé des classes de diviseurs engendrés par leurs sections globales. Ce sont exactement les images réciproques du faisceau $\mathcal{O}(1)$ par un morphisme de X dans un espace projectif. D'après le lemme ci-dessus, il existe donc une unique application de $\text{Pic}^+(X)$ dans $\mathcal{F} / \mathcal{F}_b$ qui associe à la classe de $\varphi^* \mathcal{O}(1)$ celle de la fonction h_φ , pour tout morphisme φ de X dans un espace projectif. Notons $D \mapsto \eta_D$ cette application.

Montrons qu'elle est additive. Soit donc φ et ψ des morphismes de X dans des espaces projectifs \mathbf{P}^k et \mathbf{P}^m et considérons la composition

$$\alpha: X \xrightarrow{(\varphi, \psi)} \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^m \xrightarrow{S} \mathbf{P}^{km+k+m},$$

où S désigne le plongement de Segre. Le comportement du morphisme de Segre vis à vis des hauteurs implique l'égalité $h_\alpha = h_\varphi + h_\psi$. D'autre part, le fait qu'il soit défini par des polynômes homogènes de bidegré $(1, 1)$ implique que $S^* \mathcal{O}(1)$ est isomorphe au produit tensoriel externe des deux fibrés $\mathcal{O}(1)$. Par suite, $\alpha^* \mathcal{O}(1)$ est isomorphe au produit tensoriel $\varphi^* \mathcal{O}(1) \otimes \psi^* \mathcal{O}(1)$. Si D et E désignent les classes de $\varphi^* \mathcal{O}(1)$ et $\psi^* \mathcal{O}(1)$, η_{D+E} est donc la classe de $h_\alpha = h_\varphi + h_\psi$, laquelle est la somme des classes η_D et η_E .

L'existence d'un homomorphisme de groupes $\eta: \text{Pic}(V) \rightarrow \mathcal{F} / \mathcal{F}_b$ vérifiant les propriétés exigées par le théorème résulte maintenant d'un argument élémentaire de différence. \square

Soit X une variété projective définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et soit \mathcal{L} un fibré en droites sur X . On appellera *hauteur relative à \mathcal{L}* toute fonction de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ dans \mathbf{R} dont la classe modulo les fonctions bornées est égale à $\eta_{\mathcal{L}}$. Deux telles fonctions diffèrent d'une fonction bornée. Si \mathcal{L} est ample (ou plus généralement engendré par ses sections globales), toute hauteur relative à \mathcal{L} est minorée.

Une conséquence de la construction est la propriété suivante :

PROPOSITION 1.3.7. — Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques définies sur $\overline{\mathbf{Q}}$, soit \mathcal{M} un fibré en droites sur Y . Pour toute hauteur $h_{\mathcal{M}}$ relative à \mathcal{M} sur Y , $h_{\mathcal{M}} \circ f$ est une hauteur relative à $f^* \mathcal{M}$ sur X .

Démonstration. — Par un argument de différence, il suffit de traiter le cas d'un fibré très ample. On peut donc supposer qu'il existe un plongement φ de Y dans un espace projectif tel que $\mathcal{M} \simeq \varphi^* \mathcal{O}(1)$. Alors, $\psi = \varphi \circ f$ est un morphisme de X dans un espace projectif et l'on a $\psi^* \mathcal{O}(1) \simeq f^* \mathcal{M}$. Par définition, $h_{\psi} = h_{\varphi} \circ f$ est donc une hauteur relative à $f^* \mathcal{M}$. Comme $h_{\mathcal{M}}$ est une hauteur relative à \mathcal{M} , $h_{\mathcal{M}} - h_{\varphi}$ est une fonction bornée, ce qui implique que $h_{\mathcal{M}} \circ f - h_{\psi}$ est bornée sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$. \square

§1.4. Finitude

Le théorème principal de ce paragraphe généralise la proposition 1.1.2.

THÉORÈME 1.4.1. — Pour tout entier $d \geq 1$ et tout nombre réel B , l'ensemble des points $x \in \mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ définis sur un corps de nombres de degré au plus d et dont la hauteur est au plus B est fini.

Quelques commentaires sur l'expression « définis sur un corps de nombres de degré au plus d » et sur le corps de définition d'un point de l'espace projectif. Soit $x \in \mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ et soit $[x_0 : \dots : x_k]$ un système de coordonnées homogènes de x , dans $\overline{\mathbf{Q}}$. Dire que x est défini sur un corps de nombres K signifie que $x \in \mathbf{P}^k(K)$, autrement dit que x admet un système $[\xi_0 : \dots : \xi_k]$ de coordonnées homogènes dans K . De la proportionnalité des deux systèmes résulte que x est défini sur K si et seulement si $x_i/x_j \in K$ pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{0, \dots, k\}$ tels que $x_j \neq 0$. Dit autrement, si, disons $x_0 \neq 0$, le corps $\mathbf{Q}(x_1/x_0, \dots, x_k/x_0)$ est le plus petit corps de nombres sur lequel x soit défini. On l'appelle le *corps de définition* de x et on le note $\mathbf{Q}(x)$.

La théorie de Galois fournit une autre façon de voir ce corps. Le groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ des automorphismes de $\overline{\mathbf{Q}}$ agit sur $\mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ via, rappelons-le, sur son action sur les coordonnées homogènes : si $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ et $x = [x_0 : \dots : x_k] \in \mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$, $\sigma(x) = [\sigma(x_0) : \dots : \sigma(x_k)]$. Le stabilisateur du point x est exactement le sous-groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(x))$ de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Notons d le degré du corps $\mathbf{Q}(x)$ et soit $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ une famille de représentants de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ modulo $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(x))$. (Leurs restrictions au corps $\mathbf{Q}(x)$ sont exactement les d homomorphismes de corps de $\mathbf{Q}(x)$ dans $\overline{\mathbf{Q}}$.) L'orbite de x sous $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ est alors formée des d points $\sigma_1(x), \dots, \sigma_d(x)$, que l'on appelle les conjugués de x .

Démonstration. — Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{0, \dots, k\}$, notons p_{ij} la projection de \mathbf{P}^k sur \mathbf{P}^1 donnée par $[x_0 : \dots : x_k] \mapsto [x_i : x_j]$; elle est définie hors du sous-espace projectif P_{ij} de codimension 2 défini par l'annulation des coordonnées homogènes x_i et x_j .

Si $x \in (\mathbf{P}^n \setminus P_{ij})(\overline{\mathbf{Q}})$, on a démontré que $h(p_{ij}(x)) \leq h(x)$. En outre, $p_{ij}(x)$ est défini sur $\mathbf{Q}(x)$, ainsi qu'il résulte de la description du corps de définition d'un point de l'espace projectif rappelée ci-dessus.

Supposons établi le théorème lorsque $n = 1$; alors, l'ensemble des projections $p_{ij}(x)$, pour $x \in \mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ défini sur un corps de degré au plus d et de hauteur au plus B , est fini. Autrement dit, les quotients x_i/x_j ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs possibles, d'où la finitude annoncée.

Il reste à montrer le cas $n = 1$. Introduisons un morphisme θ de $(\mathbf{P}^1)^d$ dans \mathbf{P}^d donnée par

$$\theta([x_0^{(1)} : x_1^{(1)}], \dots, [x_0^{(d)} : x_1^{(d)}]) = [z_0 : \dots : z_d],$$

où les z_j sont définis par la relation

$$\prod_{i=1}^d (x_0^{(i)} + T x_1^{(i)}) = \sum_{j=0}^d z_j T^j,$$

où T est une indéterminée. En d'autres termes, on a, pour $j \in \{0, \dots, d\}$,

$$z_j = \sum_{\substack{\varepsilon: \{1, \dots, d\} \rightarrow \{0, 1\} \\ \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_d = j}} x_{\varepsilon_1}^{(1)} \dots x_{\varepsilon_d}^{(d)},$$

versions homogènes des fonctions symétriques élémentaires puisque si $x_0^{(i)} \neq 0$ pour tout i , alors $z_0 \neq 0$ et

$$\frac{z_j}{z_0} = \sum_{i_1 < \dots < i_j} \xi^{(i_1)} \dots \xi^{(i_j)},$$

où l'on a posé $\xi^{(i)} = x_1^{(i)} / x_0^{(i)}$.

Le fibré en droites $\theta^* \mathcal{O}(1)$ est isomorphe au produit tensoriel externe des fibrés $\mathcal{O}(1)$ sur chacune des copies de \mathbf{P}^1 , car θ est définie par des formes de multidegré $(1, \dots, 1)$. Il en résulte qu'à une fonction bornée près,

$$\sum_{i=1}^d h(x^{(i)}) \approx h(\theta(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}))$$

pour tout $(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})^d$.

Soit maintenant $x \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ dont le corps de définition $\mathbf{Q}(x)$ est de degré d . Notons $x^{(1)}, \dots, x^{(d)}$ les éléments de son orbite sous $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ et appliquons la relation au d -uplet $[x] = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})$. Comme la hauteur est invariante sous $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ (prop. 1.2.2) il en résulte l'existence d'un nombre réel c tel que

$$dh(x) - c \leq h(\theta([x])) \leq dh(x) + c,$$

pour $x \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$.

Le point important est que $\theta([x])$ est, par construction même, invariant sous $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. C'est donc un point de $\mathbf{P}^d(\mathbf{Q})$ de hauteur au plus $dh(x) \leq dB + c$. (De fait, lorsque $x_0 \neq 0$, $\theta([x])$ n'est autre que la collection des coefficients du polynôme minimal de x_1/x_0 .)

Comme l'ensemble des points de $\mathbf{P}^d(\mathbf{Q})$ de hauteur au plus $dB + c$ est fini (proposition 1.1.2), l'ensemble des $\theta([x])$, pour $x \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ de hauteur au plus B et définis sur une extension de degré d de \mathbf{Q} est fini. L'application θ n'est pas injective mais ses fibres ont cardinal au plus $d!$. En effet, la connaissance de (z_0, \dots, z_d) détermine celle

de $(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(d)})$ à l'ordre près : ce sont les opposés des inverses des racines du polynôme $\sum z_j T^j$. Plus précisément, la connaissance de $\theta([x])$, c'est-à-dire, si $x_0 \neq 0$, du polynôme minimal de x_1/x_0 , détermine $x \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ à un choix parmi d près : celui d'une racine de ce polynôme de degré d .

Par conséquent, l'ensemble des points $x \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ de hauteur au plus B et définis sur une extension de degré d de \mathbf{Q} est fini, ce qu'il fallait démontrer. \square

COROLLAIRE 1.4.2. — *Soit X une variété projective sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et soit \mathcal{L} un fibré en droites ample sur X . Notons $h_{\mathcal{L}}$ une hauteur relative à \mathcal{L} sur X . Pour tout entier d et tout nombre réel B , l'ensemble des points $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ définis sur une extension de degré au plus d et de hauteur au plus B est fini.*

Démonstration. — Par définition, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $\mathcal{L}^{\otimes m}$ soit très ample, c'est-à-dire isomorphe au fibré en droites $\varphi^* \mathcal{O}(1)$, où φ est un plongement de X dans un espace projectif \mathbf{P}^k . Par construction de la machine des hauteurs, $mh_{\mathcal{L}} - h_{\varphi}$ est une fonction bornée sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$. Comme φ est injectif, on voit que l'assertion résulte de l'énoncé de finitude sur \mathbf{P}^k . \square

Remarque 1.4.3. — Le corps $k(T)$ des fractions rationnelles en une variable à coefficients dans un corps k , et ses extensions finies, les corps des fonctions de courbes algébriques projectives régulières sur une extension finie de k , jouissent de propriétés algébriques très semblables à celles du corps \mathbf{Q} , ou des corps de nombres. On peut en particulier y définir une notion de hauteur ; par exemple, si U_0, \dots, U_n sont des polynômes de $k[T]$, deux à deux sans facteur commun, la hauteur du point de l'espace projectif $\mathbf{P}^n(k(T))$ de coordonnées homogènes $[U_0 : \dots : U_n]$ est définie comme le maximum des degrés des U_i . Si le corps k est infini, on observera que le théorème de finitude ci-dessus n'est plus vrai en général, pas plus que les conséquences que nous en avons tirées, par exemple la prop. 1.1.10. (On peut par exemple prendre k algébriquement clos et considérer un endomorphisme de \mathbf{P}^n à coefficients dans k comme un endomorphisme, « constant », de l'espace projectif sur le corps $k(T)$.) Dans la suite de ce texte, je me contenterai d'indiquer quelques références bibliographiques à des extensions ou contre-exemples des théorèmes valables sur les corps de nombres.

§1.5. Hauteurs locales et fonctions de Green

La formule (1.2.7) qui définit la hauteur d'un point de l'espace projectif à coefficients dans un corps de nombres K est une somme indexée sur les différents plongements de K dans les corps \mathbf{C}_p , où p parcourt l'ensemble des nombres premier et ∞ . Cependant, chacun de ces termes n'est pas une fonction sur l'espace projectif car ils dépendent du choix des coordonnées homogènes ; seule leur somme n'en dépend plus, en vertu de la formule du produit.

La théorie des fonctions de Green permet d'exprimer la hauteur d'un point comme somme de termes locaux (« hauteurs locales ») bien définis.

A. Définition

Soit K un corps valué complet et algébriquement clos, soit X une variété projective définie sur K et soit D un diviseur de Cartier effectif sur X . (Rappelons qu'il s'agit d'un sous-schéma fermé qui est localement défini par une équation non-diviseur de zéro.)

On appelle *fonction de Green* relativement à D sur X toute fonction continue $\lambda_D: (X \setminus D)(K) \rightarrow \mathbf{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

– si D est très ample, il existe un plongement de X dans un espace projectif \mathbf{P}^n tel que $D = X \cap H_0$, où $H_0 = \{x_0 = 0\}$, et tel que la fonction donnée par

$$x \mapsto \lambda_D(x) + \log \frac{|x_0|}{\max(|x_0|, \dots, |x_n|)}$$

s'étende (de manière unique car $X \setminus D(K)$ est dense dans $X(K)$) en une fonction continue et bornée sur $X(K)$.

– si $D = E - F$ est la différence de deux diviseurs très amples, il existe des fonctions de Green λ_E et λ_F relativement à E et F comme ci-dessus telles que $\lambda_D = \lambda_E - \lambda_F$ sur $(X \setminus (E \cup F))(K)$.

LEMME 1.5.1. — *L'ensemble des fonctions de Green relativement à un diviseur de Cartier D est un espace affine sous l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $X(K)$.*

Démonstration. — Soit D et E des diviseurs très amples et soit λ_D, λ_E des fonctions de Green définies à l'aide de plongements φ et ψ . On vérifie que la composition de (φ, ψ) et d'un plongement de Segre S définit la fonction $\lambda_D + \lambda_E$, à une fonction continue bornée près.

Par un argument élémentaire, il suffit alors de démontrer que la différence de deux hauteurs locales associées à un diviseur très ample s'étend en une fonction continue bornée sur $X(K)$. Soit $\varphi: X \rightarrow \mathbf{P}^n$ et $\psi: X \rightarrow \mathbf{P}^m$ des plongements tels que $D = \varphi^* H_0 = \psi^* H_0$, où H_0 est l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$ dans \mathbf{P}^n , resp. d'équation $y_0 = 0$ dans \mathbf{P}^m . En particulier, ces deux plongements sont associés à un plongement $\alpha: X \rightarrow \mathbf{P}^s$ défini par le système linéaire complet associé à D composés avec des projections linéaires φ' et ψ' dont les centres ne rencontrent pas $\alpha(X)$. Par hypothèse, les formes linéaires $(\varphi'_0, \dots, \varphi'_n)$ définissant φ' , resp. $(\psi'_0, \dots, \psi'_m)$ définissant ψ' ne s'annulent pas simultanément sur $\alpha(X)$. Comme les formes φ'_0 et ψ'_0 sur \mathbf{P}^s définissent toutes deux $\alpha(D)$, leur quotient est une fonction régulière sur $\alpha(X)$, donc constante sur chacune des composantes connexes de $\alpha(X)$. Par conséquent, l'application de $\alpha(X)$ dans \mathbf{R} définie par

$$\mu: y = [y_0 : \dots : y_s] \mapsto \log \frac{\max(|\varphi'_0(y)|, \dots, |\varphi'_n(y)|)}{\max(|\psi'_0(y)|, \dots, |\psi'_m(y)|)}$$

est bien définie — numérateur et dénominateur sont homogènes — et continue sur $\alpha(X)$. Si K est localement compact, en l'occurrence si $K = \mathbf{C}$, elle est alors bornée. Dans le cas général, il faut une fois de plus utiliser le théorème des zéros de Hilbert.

L'existence d'une *majoration*

$$\max(|\varphi'_0(y)|, \dots, |\varphi'_n(y)|) \leq c \max(|y_0|, \dots, |y_s|)$$

est évidente. Soit (P_j) une famille de polynômes homogènes définissant $\alpha(X)$. La famille (P_j, ψ'_i) n'ayant pas de zéro commun, il existe des polynômes Q_{jk} et H_{ik} , et un entier t , tels que

$$Y_k^t = \sum_k Q_{jk} P_j + \sum_{i=0}^m \psi'_i H_{ik}.$$

On peut de plus supposer ces polynômes homogènes. Puisque $P_j(y) = 0$ pour tout j , il existe un nombre réel c tel que

$$|y_k|^t \leq c \max(|\psi'_0(y)|, \dots, |\psi'_m(y)|) \max_{i,k} |H_{ik}(y)|.$$

De plus, comme les polynômes H_{ik} sont de degré $t-1$, on a une majoration $|H_{ik}(y)| \ll \max(|y_0|, \dots, |y_s|)^{t-1}$. Finalement, on en déduit une *minoration*

$$\max(|\psi'_0(y)|, \dots, |\psi'_m(y)|) \geq c' \max(|y_0|, \dots, |y_s|).$$

Le fait que μ soit bornée est alors évident. \square

PROPOSITION 1.5.2. — *Soit X une variété projective sur K , soit D et E des diviseurs de Cartier sur X et soit λ_D, λ_E des fonctions de Green pour D et E respectivement. Alors, les fonctions $\lambda_D + \lambda_E$ et $\lambda_D - \lambda_E$ sont les restrictions à $X \setminus (D \cup E)(K)$ de fonctions de Green pour $D + E$ et $D - E$ respectivement.*

Démonstration. — Compte tenu de la définition, il suffit de traiter le cas de $D + E$ sous l'hypothèse que D et E sont très amples, associés à des plongements $\varphi: X \hookrightarrow \mathbf{P}^k$ et $\psi: X \hookrightarrow \mathbf{P}^m$ tels que D est défini par $x_0 = 0$ dans $\varphi(X)$ et E est défini par $y_0 = 0$ dans $\psi(X)$. Considérons la composition α de (φ, ψ) et du plongement de Segre $S: \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^m \hookrightarrow \mathbf{P}^{km+k+m}$, donné par $S([x_0: \dots: x_k], [y_0: \dots: y_m]) = [x_0 y_0: \dots: x_k y_m]$. Dans $\alpha(X)$, l'équation $z_0 = 0$ définit le diviseur de Cartier $D + E$. L'assertion résulte alors de l'égalité

$$\log \frac{|x_0 y_0|}{\max(|x_i y_j|)} = \log \frac{|x_0|}{\max(|x_i|)} + \log \frac{|y_0|}{\max(|y_j|)},$$

valable pour tout couple de points $(x, y) \in \mathbf{P}^k(K) \times \mathbf{P}^m(K)$ tels que $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$. \square

PROPOSITION 1.5.3. — *Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme entre variétés projectives sur K , soit D un diviseur de Cartier sur X , soit E un diviseur de Cartier sur Y . On suppose que $D = f^*E$. Si λ_E est une fonction de Green relativement à E sur Y , alors $\lambda_E \circ f$ est une fonction de Green relativement à D sur X .*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où E est très ample, associé à un plongement ψ de Y dans \mathbf{P}^m et tel que E soit défini par l'équation $y_0 = 0$ dans $\psi(Y)$. Soit D' un diviseur de Cartier très ample sur X , associé à un plongement φ de X dans \mathbf{P}^k de sorte que D' soit défini par l'équation $x_0 = 0$ dans $\varphi(X)$. Introduisons alors la composition α de $(\varphi, \psi \circ f): X \rightarrow \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^m$ et du plongement de Segre vers \mathbf{P}^{km+k+m} . C'est un plongement et l'équation $z_0 = 0$ définit $D' + f^*E = D' + D$ dans $\alpha(X)$. Pour $x \in X$ de

coordonnées homogènes $[x_0 : \cdots : x_k]$ et d'images $y = f(x) = [y_0 : \cdots : y_m]$ dans Y et $z = \alpha(x) = [z_0 : \cdots : z_{km+k+m}]$ dans \mathbf{P}^{km+k+m} , on a alors

$$\log \frac{|z_0|}{\max(|z_i|)} = \log \frac{|x_0|}{\max(|x_i|)} + \log \frac{|y_0|}{\max(|y_j|)}.$$

Si $\lambda_{D'}$ est une fonction de Green pour D' , il en résulte que $\lambda_{D'} + \lambda_E \circ f$ est une fonction de Green pour $D' + f^*E$; par conséquent, $\lambda_E \circ f$ est une fonction de Green pour E .⁽²⁾ \square

B. Cas du corps \mathbf{C}

Le fibré en droites $\mathcal{O}(D)$ a pour sections les fonctions méromorphes f ayant au plus D comme pôle, c'est-à-dire telles que $\text{div}(f) + D$ soit effectif. Si D est effectif, la fonction régulière constante 1 définit en particulier une section globale de ce fibré en droites que l'on note $\mathbf{1}_D$ et dont le diviseur (en tant que section de $\mathcal{O}(D)$) n'est autre que D .

Supposons que le corps valué soit le corps des nombres complexes. Soit X une variété projective complexe, soit D un diviseur de Cartier de X et soit $\lambda_D : (X \setminus D)(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Pour que λ_D soit une hauteur locale relativement à D , il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement ouvert fini (U_1, \dots, U_k) tel que D soit défini par une équation f_i sur U_i et que la fonction $\lambda_D + \log |f_i|$ s'étende en une fonction continue sur U_i . Il revient ainsi au même d'exiger qu'il existe une *métrique hermitienne continue* sur le fibré en droites $\mathcal{O}(D)$ telle que $\log \|\mathbf{1}_D\| = \lambda_D$.

Notons par exemple que la métrique hermitienne de référence que nous avons choisie sur le fibré $\mathcal{O}(1)$ de l'espace projectif \mathbf{P}^k est donnée par la formule

$$\|a_0 X_0 + \cdots + a_k X_k\|([x_0 : \cdots : x_k]) = \frac{|a_0 x_0 + \cdots + a_k x_k|}{\max(|x_0|, \dots, |x_k|)}.$$

Ce n'est pas tout à fait la métrique de Fubini-Study, laquelle est donnée par

$$\|a_0 X_0 + \cdots + a_k X_k\|([x_0 : \cdots : x_k]) = \frac{|a_0 x_0 + \cdots + a_k x_k|}{(|x_0|^2 + \cdots + |x_k|^2)^{1/2}}.$$

On voit que l'on peut ainsi définir la notion de fonction de Green \mathcal{G}^∞ , parallèlement à celle de métrique hermitienne \mathcal{G}^∞ : par définition, une fonction de Green est dite \mathcal{G}^∞ si c'est le logarithme de la norme de la section $\mathbf{1}_D$ pour une métrique hermitienne \mathcal{G}^∞ .

La formule classique $\text{dd}^c \log |z|^{-2} + \delta_0 = 0$ en une variable et, plus généralement, la formule de Poincaré-Lelong $\text{dd}^c \log |f|^{-2} + \delta_{\text{div}(f)} = 0$ entraînent que $\text{dd}^c g_D + \delta_D$ est une forme différentielle de type $(1, 1)$, lisse, pourvu que g_D soit une fonction de Green \mathcal{G}^∞ . On a noté δ_D le courant d'intégration sur D , défini, au choix, par intégration des formes sur la partie lisse de D ou par résolution des singularités. C'est un courant positif fermé sur $X(\mathbf{C})$, de bidegré $(1, 1)$.

On retrouve alors la définition standard en géométrie d'Arakelov telle que posée par GILLET & SOULÉ (1990a).

⁽²⁾Voir l'exercice 1.6.12 pour un point de détail nécessaire à une preuve complète.

DÉFINITION 1.5.4. — *Soit X une variété projective complexe (lisse) et soit Z une sous-variété intègre de X de codimension p . On appelle courant de Green pour Z tout courant g_Z sur $X(\mathbf{C})$ tel que $dd^c g_Z + \delta_Z$ soit une forme lisse de type (p, p) .*

Revenons aux fonctions de Green associées à un diviseur D . Soit g_D une telle fonction de Green, supposons-la lisse, ou au moins de classe \mathcal{C}^2 , de sorte qu'est définie la forme différentielle $\omega_D = dd^c g_D + \delta_D$.

Alors, pour tout entier $k \geq 1$, $\wedge^k \omega_D$ est une forme de type (k, k) sur $X(\mathbf{C})$. Prenons en particulier $k = \dim X$; on associe classiquement à cette forme une mesure sur $X(\mathbf{C})$: en coordonnées locales holomorphes $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_k = x_k + iy_k$, si $\wedge^k \omega_D = f(z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_k \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_k$, la mesure correspondante est $|f(z)| 2^k dx_1 dy_1 \dots dx_k dy_k$. (Observer que $dz_j \wedge d\bar{z}_j = -2i dx_j \wedge dy_j$.) Que cela soit bien défini résulte de la formule du changement de variables dans les intégrales multiples.

On vérifie par une nouvelle application de la formule de Poincaré-Lelong que cette forme ω_D et cette mesure $\wedge^k \omega_D$ ne dépendent du couple (D, g_D) que par l'intermédiaire du fibré hermitien qu'il définit. Elles coïncident d'ailleurs avec la forme de Chern de ce fibré hermitien et sa puissance extérieure maximale.

Dans le cas d'un corps p -adique, la situation est plus délicate pour un certain nombre de raisons :

- \mathbf{C}_p n'est pas localement compact ;
- l'opérateur aux dérivées partielles dd^c n'existe pas, pas plus d'ailleurs que les courants ;
- les mesures naturelles n'existent pas.

La théorie de ZHANG (1995b) fournit néanmoins une bonne notion de métrique p -adique. On résout (simultanément) ces trois problèmes à l'aide de la théorie des espaces analytiques introduits par BERKOVICH (1990), cf. GUBLER (1998, 2003) et CHAMBERT-LOIR (2006).

C. Décomposition de la hauteur en termes locaux

Soit X une variété projective sur un corps de nombres K et soit D un diviseur de Cartier sur X . Il s'agit d'écrire la hauteur d'un point de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ qui n'appartient pas à D , relativement au fibré $\mathcal{O}(D)$, comme une somme de termes locaux indexée par l'ensemble M_K des places de K .

Si v est une place de K , nous noterons \mathbf{C}_v le corps valué complet algébriquement clos \mathbf{C} ou \mathbf{C}_p correspondant et ε_v le nombre de plongements de K dans \mathbf{C}_v qui induisent cette valeur absolue. L'adhérence K_v de K dans \mathbf{C}_v est un corps valué complet (égal à \mathbf{R} , \mathbf{Q}_p pour p un nombre premier, ou une extension finie d'un de ces corps). Nous noterons \overline{K}_v la clôture algébrique de K_v dans \mathbf{C}_v .

Soit v une place de K . Soit g_v une fonction de Green sur $X(\mathbf{C}_v)$ relativement à D (nous dirons aussi que g_v est une fonction de Green v -adique). On définit une *hauteur locale* relativement à D de la façon suivante. Soit $P \in (X \setminus D)(\overline{K}_v)$; soit n son degré sur K

et soit P_1, \dots, P_n ses conjugués dans $X(\mathbf{C}_v)$. On pose

$$h_v(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_v(P_i).$$

Si D est effectif et très ample, nous dirons qu'une famille (g_v) de fonctions de Green v -adiques relativement à D , indexée par l'ensemble M_K des places de K est *élémentairement admissible* si pour presque toute place v , g_v est définie par un même plongement $f = [f_0 : \dots : f_s]$ (défini sur K) de X dans un espace projectif \mathbf{P}^s dont D est la section hyperplane $\{x_0 = 0\}$: pour toute place v , sauf pour un nombre fini d'entre elles, on a ainsi

$$g_v(x) = -\log \frac{|f_0(x)|_v}{\max(|f_0(x)|_v, \dots, |f_s(x)|_v)}.$$

Dans le cas général, D est la différence $E - F$ de deux diviseurs effectifs très amples et nous dirons qu'une famille (g_v) est *admissible* si l'on a $g_v = g_{E,v} - g_{F,v}$ pour tout v , où $(g_{E,v})_v$ et $(g_{F,v})_v$ sont des familles élémentairement admissibles de fonctions de Green pour E et F respectivement.

Le lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur, montre que l'ensemble des familles admissibles de fonctions de Green est stable par les opérations standard de la géométrie algébrique.

LEMME 1.5.5. — *Soit X une variété algébrique projective sur un corps de nombres K .*

a) *Soit (g_v) et (g'_v) des familles de fonctions de Green (élémentairement) admissibles relativement à des diviseurs D et D' . La famille $(g_v + g'_v)$ est une fonction de Green (élémentairement) admissible relativement à $D + D'$.*

b) *Soit X' une variété algébrique projective, intègre, définie sur K , soit $f : X' \rightarrow X$ un morphisme et soit D un diviseur sur X tel que $f(X') \not\subset D$. Si (g_v) est une famille de fonctions de Green (élémentairement) admissible relativement à D , $(g_v \circ f)$ est une famille de fonctions de Green (élémentairement) admissible relativement au diviseur f^*D .*

PROPOSITION 1.5.6. — *Soit D un diviseur de Cartier sur X , soit h_D une hauteur pour D et soit (g_v) une famille admissible de fonctions de Green pour le diviseur D . Alors, la série $h(x) = \sum_{v \in M_K} \varepsilon_v h_v(x)$ est une somme finie pour tout $x \in (X \setminus D)(\overline{\mathbf{Q}})$; de plus, $h - h_D$ est bornée sur $(X \setminus D)(\overline{\mathbf{Q}})$.*

Démonstration. — Par linéarité, on se ramène au cas où le diviseur D est très ample et où (g_v) est une famille élémentairement admissible de fonctions de Green. Soit $\varphi : X \hookrightarrow \mathbf{P}^k$ un plongement de X dans un espace projectif dont D est la section hyperplane $\{X_0 = 0\}$ et définissant presque toutes les fonctions de Green. Pour toute place v et tout point $x \in (X \setminus D)(\mathbf{C}_v)$, le point $\varphi(x)$ a des coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_k]$ avec $x_0 \neq 0$; posons alors

$$g_v^0(x) = g_v(x) + \log \frac{|x_0|_v}{\max(|x_0|_v, \dots, |x_k|_v)}.$$

Par définition, pour toute place v , la fonction g_v^0 est bornée, et est identiquement nulle pour presque toute place v .

Soit alors K' un corps de nombres contenant K et soit $x \in (X \setminus D)(K')$, de conjugués $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ sur K . Si $\varphi(x)$ a pour coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_k]$, on a donc $x_0 \neq 0$ et

$$\begin{aligned} h_\varphi(x) &= h_{\mathbf{p}^k}(\varphi(x)) = \frac{1}{[K' : \mathbf{Q}]} \sum_{p \leq \infty} \sum_{\sigma : K' \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \max(|\sigma(x_0)|, \dots, |\sigma(x_k)|_p) \\ &= -\frac{1}{[K' : \mathbf{Q}]} \sum_{p \leq \infty} \sum_{\sigma : K' \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \frac{|\sigma(x_0)|}{\max(|\sigma(x_0)|, \dots, |\sigma(x_k)|_p)} \\ &= -\frac{1}{n[K : \mathbf{Q}]} \sum_{i=1}^n \sum_{v \in M_K} \varepsilon_v (g_v^0(x^{(i)}) - g_v(x^{(i)})) \\ &= -\frac{1}{n[K : \mathbf{Q}]} \sum_{i=1}^n \sum_{v \in M_K} \varepsilon_v g_v^0(x^{(i)}) + \frac{1}{n[K : \mathbf{Q}]} \sum_{v \in M_K} \varepsilon_v \sum_{i=1}^n g_v(x^{(i)}) \\ &= -\frac{1}{n[K : \mathbf{Q}]} \sum_{i=1}^n \sum_{v \in M_K} \varepsilon_v g_v^0(x^{(i)}) + \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{v \in M_K} \varepsilon_v \hat{h}_v(x). \end{aligned}$$

La proposition résulte alors de ce que la première somme est bornée indépendamment de x . \square

D. La hauteur détermine les fonctions de Green

Soit X une variété algébrique projective sur un corps de nombres, soit D un diviseur de Cartier sur X et soit h_D une hauteur pour D . Il est naturel de se demander dans quelle mesure h_D détermine D . Suivant qu'on se donne h_D exactement, ou à $O(1)$ près, la réponse est fournie par le résultat suivant.

THÉORÈME 1.5.7. — *Soit X une variété projective lisse sur un corps de nombres K ; soit D un diviseur de Cartier sur X et soit h_D une hauteur pour D .*

a) *Supposons que h_D soit bornée ; alors la classe de D est de torsion dans le groupe de Picard de X : il existe un entier n et une fonction rationnelle f sur X telle que $nD = \text{div}(f)$.*

b) *Supposons que h_D possède une décomposition en somme de termes locaux, données par une famille admissible (g_v) de fonctions de Green pour le diviseur D . Si h_D est constante, chacune des fonctions g_v est constante.*

Ce théorème est dû à A. NÉRON pour la première partie, voir SERRE (1997), §2.9 et 3.11, et à AGBOOLA & PAPPAS (2000) pour la seconde. (Dans cet article, il est d'ailleurs observé qu'il suffit de supposer X normale dans l'énoncé du théorème). La seconde partie est tout particulièrement intéressante dans les contextes où l'on dispose de familles admissibles canoniques de fonctions de Green, en particulier celui des systèmes dynamiques (voir KAWAGUCHI & SILVERMAN (2007a)).

§1.6. Exercices

Exercice 1.6.1. — Soit ξ un nombre algébrique, soit d son degré et soit $P = a_0X^d + \dots + a_d$ le polynôme minimal. on note $H(P) = \max(|a_0|, \dots, |a_d|)$. On rappelle que la hauteur $h(\xi)$ de ξ est par définition celle du point de coordonnées homogènes $[1 : \xi]$ de \mathbf{P}^1 .

Soit $P = a_0X^d + \dots + a_d$ un polynôme à coefficients complexes de degré d . On note $H(P) = \max(|a_0|, \dots, |a_d|)$.

a) Montrer que l'on a l'inégalité

$$2^{-d}H(P) \leq M(P) \leq \sqrt{d+1}H(P).$$

b) En déduire que pour deux polynômes P_1 et P_2 , à coefficients complexes, on a

$$(1.6.2) \quad H(P_1)H(P_2) \leq 2^d \sqrt{d+1}H(P_1P_2)$$

$$(1.6.3) \quad H(P_1P_2) \leq 2^d \left(1 + \frac{d}{2}\right)H(P_1)H(P_2),$$

où $d = \deg(P_1P_2)$.

c) Si P est le polynôme minimal d'un nombre algébrique ξ , montrer que la hauteur $h(\xi)$ est encadrée comme suit :

$$\frac{1}{d} \log H(P) - \log 2 \leq h(\xi) \leq \frac{1}{d} \log H(P) + \frac{1}{2d} \log(d+1).$$

Exercice 1.6.4. — Soit $f \in \overline{\mathbf{Q}}(t)$ une fraction rationnelle non constante, écrite sous la forme P/Q d'un quotient de polynômes P et $Q \in \overline{\mathbf{Q}}[t]$, premiers entre eux; on pose $d = \max(\deg P, \deg Q)$. Montrer que l'on a

$$\lim_{h(\xi) \rightarrow \infty} \frac{h(f(\xi))}{h(\xi)} = d.$$

Exercice 1.6.5. — Soit ξ un entier algébrique de degré d ; on note ξ_1, \dots, ξ_d ses conjugués dans \mathbf{C} et, pour $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{j=1}^d \xi_j^n$ la n -ième somme de Newton. On pose aussi $\mu(\xi) = \max(|\xi_1|, \dots, |\xi_d|)$

a) Montrer que pour tout entier n , S_n est un entier relatif qui vérifie $|S_n| \leq d\mu(\xi)^n$. (Utiliser le théorème sur les fonctions symétriques.)

b) Soit p un nombre entier tel que $S_n = S_{np}$ pour $1 \leq n \leq d$; montrer que ξ est une racine de l'unité (ou $\xi = 0$).

c) Montrer que pour tout nombre premier p , S_{np} et S_n^p sont congrus à S_n modulo p . (Observer que les coefficients du polynôme symétrique $X_1^p + \dots + X_d^p - (X_1 + \dots + X_d)^p$ sont multiples de p .)

d) On suppose que $\xi \neq 0$ et que ξ n'est pas une racine de l'unité; on va montrer que $\mu(\xi) \geq e^{1/(4ed^2)}$. Supposons par l'absurde que l'ingalité inverse soit vraie et soit p un nombre premier tel que $2ed < p < 4ed$ (il en existe d'après le théorème de Tchébitcheff — postulat de BERTRAND). Montrer que $|S_{np} - S_n| < p$ pour $1 \leq n \leq d$, puis que $S_{np} = S_n$ pour $1 \leq n \leq d$. En déduire que ξ est une racine de l'unité.

e) Sous la même hypothèse que d), montrer que $h(\xi) \geq 1/(4ed^3)$. Pour d'autres résultats dans la même veine, voir l'exercice 2.4.5 du chapitre 2, ainsi par exemple

que le livre de WALDSCHMIDT (2000) où est démontré le meilleur résultat connu, dû à DOBROWOLSKI (1979), et repris dans la prop. 2.2.10 du chapitre 2.

Exercice 1.6.6. — Soit $p: \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^1$ la projection linéaire donnée par $p([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 : x_1]$, d'unique point d'indétermination $Q = [0 : 0 : 1]$. Soit X une courbe de \mathbf{P}^2 , d'équation homogène $f(x_0, x_1, x_2) = 0$. On suppose que X ne contient pas le point Q . Déterminez (en fonctions des coefficients de f) un nombre réel c_X tel que $|h(p(x)) - h(x)| \leq c_X$ pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$.

Exercice 1.6.7. — Soit X une variété algébrique projective intègre définie sur un corps de nombres F et soit k sa dimension.

a) Démontrer qu'il existe un morphisme fini $f: X \rightarrow \mathbf{P}^k$. (Plonger X dans un espace projectif \mathbf{P}^n et vérifier qu'une projection générique convient.)

b) Soit \mathcal{L} un fibré en droites ample sur X . Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\mathcal{L}^n \otimes f^* \mathcal{O}(-1)$ soit ample. En déduire que pour toute fonction hauteur sur X associée à \mathcal{L} , il existe des nombres réels $a > 0$ et b tels que $h_{\mathcal{L}}(x) \geq ah(f(x)) - b$ pour tout $x \in \overline{\mathbf{Q}}$.

c) Démontrer que pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$, le degré de l'extension $F(x)/F(f(x))$ est majoré par le degré de f .

d) Observer que la hauteur n'est pas majorée sur $\mathbf{P}^k(F)$ (il suffit de traiter le cas où $F = \mathbf{Q}$). À l'aide du théorème de finitude (cor. 1.4.2), en déduire que la hauteur $h_{\mathcal{L}}$ n'est pas majorée sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$.

e) Démontrer qu'il existe un nombre réel c tel que l'ensemble des points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ de hauteurs $\leq c$ soit dense dans X pour la topologie de Zariski. (Considérer des points $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ tels que les coordonnées homogènes de $f(x)$ soient des racines de l'unité.)

Exercice 1.6.8. — Soit $f: \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^1$ une application rationnelle donnée par trois polynômes (f_0, f_1, f_2) de même degré d et sans facteur commun. Son lieu d'indétermination Z est un ensemble fini de points. Si X est une courbe de \mathbf{P}^2 , supposée lisse ou au moins lisse en tout point de $X \cap Z$, la restriction de f à $X \setminus (X \cap Z)$ s'étend en un unique morphisme \tilde{f} de X dans \mathbf{P}^1 .

a) Le degré \tilde{d} de \tilde{f} est inférieur ou égal à d , en fait égal à $d - \text{card}(X \cap Z)$ (cardinal compté avec multiplicités). Pour que $\tilde{d} = d$, il faut et il suffit que X ne rencontre pas Z .

b) Il existe un nombre réel c_X tel que pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$, $|\tilde{d}h(x) - h(\tilde{f}(x))| \leq c_X$.

Exercice 1.6.9. — Soit X une variété projective et soit D un diviseur de Cartier effectif sur X . Soit h_D une hauteur relative au fibré en droites $\mathcal{O}(D)$ sur X . Il existe un nombre réel c tel que $h_D(x) \geq c$ pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ tel que $x \notin D$.

Exercice 1.6.10. — Soit X une variété projective et soit \mathcal{L} un fibré en droites sur X . Soit B le lieu des zéros communs de toutes les sections des puissances de \mathcal{L} . (Dire que $B = \emptyset$ signifie donc qu'une puissance de \mathcal{L} est engendrée par ses sections globales.) Soit $h_{\mathcal{L}}$ une hauteur relative à \mathcal{L} sur X . Il existe un nombre réel c tel que $h_{\mathcal{L}}(x) \geq c$ pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ qui n'appartient pas à B .

Exercice 1.6.11. — Soit \mathcal{L} un fibré en droites sur X tel qu'il existe un fibré en droites ample \mathcal{M} de sorte que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}^{-1}$ soit effectif (en d'autres termes, \mathcal{L} est *gros*). Il existe un fermé de Zariski strict Z de X hors duquel la propriété de finitude pour la hauteur $h_{\mathcal{L}}$ est vérifiée.

Exercice 1.6.12. — Le résultat suivant était implicite dans la démonstration des énoncés de base sur les fonctions de Green.

Soit X une variété projective sur un corps K , valué et algébriquement clos et soit D un diviseur de Cartier sur X . Soit λ une fonction d'un ouvert U de $X \setminus D(K)$ dans \mathbf{R} ; on suppose que U est dense dans $X(K)$.

On suppose que pour tout point $x \in X(K)$, il existe un diviseur de Cartier très ample E ne contenant pas x et une fonction de Green λ_E pour E tels que la fonction $\lambda + \lambda_E$ s'étende (nécessairement uniquement, car U est dense) en une fonction de Green pour $D + E$. Alors λ s'étend uniquement en une fonction de Green pour D .

CHAPITRE 2

SYSTÈMES DYNAMIQUES D'ORIGINE ARITHMÉTIQUE

§2.1. Systèmes dynamiques polarisés

A. La définition et quelques exemples

Par définition, un *système dynamique polarisé* est la donnée d'une variété projective X (disons intègre, mais pas forcément lisse), d'un endomorphisme f de X et d'un fibré en droites ample \mathcal{L} sur X tel que $f^* \mathcal{L}$ soit isomorphe à une puissance \mathcal{L}^d de \mathcal{L} , où d est un entier *supérieur ou égal à 2*.

L'entier d , que ZHANG (2006) propose d'appeler le *poids* de (X, f, \mathcal{L}) , est relié au *degré* de f par la formule $\deg(f) = d^{\dim X}$. On a en effet

$$c_1(f^* \mathcal{L})^{\dim X} = d^{\dim X} c_1(\mathcal{L})^{\dim X} = \deg(f) c_1(\mathcal{L})^{\dim X},$$

d'où l'assertion en divisant par $c_1(\mathcal{L})^{\dim X}$ qui n'est pas nul puisque \mathcal{L} est ample.

Comme l'a noté SERRE (1960), l'action d'un tel endomorphisme sur la cohomologie de X obéit à « l'analogue kählerien des conjectures de Weil ». ⁽¹⁾ Supposant X lisse et de dimension k , l'endomorphisme f^* du groupe de cohomologie singulière $H^j(X, \mathbb{C})$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont toutes de valeur absolue archimédienne $d^{j/2}$. En particulier, tous les *degrés dynamiques* de f (définis comme les rayons spectraux de f^* agissant sur la cohomologie singulière, voir les articles de CANTAT et GUEDJ) sont strictement dominés par le dernier, égal à d^k . L'étude des systèmes dynamiques polarisés apparaît ainsi comme un cas particulier des études plus spécifiquement dynamiques exposées dans ce volume.

Nous avons déjà donné au paragraphe 1.1/B l'exemple de l'espace projectif \mathbf{P}^k et d'un endomorphisme f défini par une famille (f_0, \dots, f_k) de polynômes homogènes de degré d sans zéro commun autre que $(0, \dots, 0)$. On a en effet $f^* \mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{O}(d)$. Les sous-variétés de \mathbf{P}^k qui sont stables par f fournissent de même un système dynamique polarisé. Par un résultat de FAKHRUDDIN (2003), c'est en fait le cas général :

⁽¹⁾La conjecture de WEIL en question est l'hypothèse de RIEMANN pour les variétés algébriques sur les corps finis : elle concerne le cas où X est une variété algébrique projective lisse sur un corps fini de cardinal q et f est l'endomorphisme de Frobenius donné par l'élévation des coordonnées à la puissance q . Son poids est q .

PROPOSITION 2.1.1 (Fakhruddin). — Soit (X, f, \mathcal{L}) un système dynamique polarisé défini sur un corps infini C .⁽²⁾ Il existe un plongement ι de X dans un espace projectif \mathbf{P}^k tel que $\iota^* \mathcal{O}(1)$ soit isomorphe à une puissance de \mathcal{L} , et un endomorphisme F de degré d de \mathbf{P}^k tels que $F \circ \iota = \iota \circ f$.

(Dans ce qui suit, remplacer \mathcal{L} par une puissance sera souvent inoffensif.)

Démonstration. — Quitte à remplacer \mathcal{L} par une de ses puissances \mathcal{L}^d , on peut supposer que \mathcal{L} est très ample et que, pour tout entier $m > 0$, d'une part $H^i(X, \mathcal{L}^m) = 0$ pour tout entier $i > 0$, et d'autre part l'homomorphisme de multiplication

$$H^0(X, \mathcal{L}^m) \otimes H^0(X, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{L}^{m+1})$$

est surjectif. Notons alors $\iota: X \hookrightarrow \mathbf{P}^k$ le plongement de X dans un espace projectif défini par \mathcal{L} ; par construction, on a $\iota^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(1) = \mathcal{L}$ et, si $m \geq 1$, l'homomorphisme naturel de $H^0(X, \mathcal{L})^{\otimes m}$ dans $H^0(X, \mathcal{L}^m)$ est surjectif. En outre, par un raisonnement élémentaire de régularité de Castelnuovo–Mumford, le faisceau d'idéaux de X dans \mathbf{P}^k est de régularité au plus 2; en particulier, l'idéal homogène de X dans \mathbf{P}^k est engendré par des polynômes de degré d (on a supposé $d \geq 2$).

Pour $j \in \{0, 1, \dots, \dim X\}$, choisissons par récurrence une section s_j dans $H^0(X, \mathcal{L})$ qui n'est identiquement nulle sur aucune composante irréductible du lieu d'annulation commun de s_0, \dots, s_{j-1} . Alors, toute composante irréductible du lieu d'annulation commun de s_0, \dots, s_j est de codimension $> j$ dans X . En particulier, $s_0, \dots, s_{\dim X}$ n'ont pas de zéro commun. On peut en outre supposer ces sections linéairement indépendantes. Complétons-les alors en une base (s_0, \dots, s_k) de $H^0(X, \mathcal{L})$.

Soit $j \in \{0, \dots, k\}$; alors, $f^* s_j$ est une section de $H^0(X, f^* \mathcal{L}) = H^0(X, \mathcal{L}^d)$ et, par l'hypothèse faite sur \mathcal{L} , il existe un polynôme $F_j \in C[X_0, \dots, X_k]$, homogène de degré d tel que $f^* s_j = F_j(s_0, \dots, s_k)$. Les polynômes F_0, \dots, F_k définissent une *application rationnelle* $F: [X_0 : \dots : X_k] \mapsto [F_0 : \dots : F_k]$ de \mathbf{P}^k dans lui-même, définie là où les F_j ne s'annulent pas simultanément. Nous allons démontrer qu'il est possible de modifier les F_j de sorte que F soit définie partout.

Plus précisément, nous allons démontrer qu'il existe des polynômes F_0, \dots, F_k dans $C[X_0, \dots, X_k]$, homogènes de degré d , vérifiant $f^* s_j = F_j(s_0, \dots, s_k)$ et tels que pour tout entier $s \in \{\dim X, \dots, k\}$ et toute composante irréductible Z de $\mathbf{V}(F_0, \dots, F_s) \subset \mathbf{P}^k$, $\text{codim}(Z, \mathbf{P}^k) > s$. (On note $\mathbf{V}(\dots)$ le lieu de \mathbf{P}^k défini par une famille de polynômes homogènes.)

Observons que l'on peut conserver le choix précédent pour $F_0, \dots, F_{\dim X}$. En effet, si Z est une composante irréductible de $\mathbf{V}(F_0, \dots, F_{\dim X})$, $Z \cap X = \emptyset$ (un point x de $X \cap Z$ vérifierait $f^* s_j(x) = 0$ pour $0 \leq j \leq \dim X$ et $f(x)$ serait un zéro commun de $s_0, \dots, s_{\dim X}$). En particulier, $\text{codim}(Z, \mathbf{P}^k) > \dim X$ car deux sous-variétés de \mathbf{P}^k de dimensions « complémentaires » ont un point d'intersection.

⁽²⁾Cette hypothèse, reprise de FAKHRUDDIN (2003), n'est probablement pas nécessaire pour le présent énoncé.

Supposons maintenant $j > \dim X$ et F_0, \dots, F_{j-1} construits. Notons \mathcal{P}_d l'espace vectoriel des polynômes de $C[X_0, \dots, X_k]$ qui sont homogènes de degré d et \mathcal{I}_d le sous-espace vectoriel formé des polynômes qui sont identiquement nuls sur X . Pour $G \in \mathcal{P}_d$, la condition $f^* s_j = G(s_0, \dots, s_k)$ définit un sous-espace affine A de \mathcal{P}_d , d'espace vectoriel associé \mathcal{I}_d . Toujours pour $G \in \mathcal{P}_d$, et pour Z une composante irréductible de $\mathbf{V}(F_0, \dots, F_{j-1})$, la condition que G soit identiquement nul sur Z définit un sous-espace vectoriel V_Z de \mathcal{P}_d . Il s'agit de trouver un élément de A qui n'appartienne à aucun des sous-espaces V_Z . Comme le corps C est infini, c'est possible dès lors qu'aucun des sous-espaces V_Z ne contient A .

En initialisant la récurrence, on a démontré que ces composantes Z sont disjointes de X . Or l'hypothèse que l'idéal homogène de X dans \mathbf{P}^k est engendré par des polynômes de degré d implique précisément qu'il existe, pour toute composante Z comme ci-dessus, un polynôme $H \in \mathcal{I}_d$ qui n'est pas identiquement nul sur Z . Autrement dit, \mathcal{I}_d n'est pas contenu dans V_Z et *a fortiori*, le sous-espace affine A dirigé par \mathcal{I}_d n'est pas contenu dans V_Z .

Cela conclut par récurrence la construction des polynômes F_0, \dots, F_k . En particulier, les composantes irréductibles de $\mathbf{V}(F_0, \dots, F_k)$ sont de codimension $> k$ dans \mathbf{P}^k : cela entraîne que $\mathbf{V}(F_0, \dots, F_k) = \emptyset$ et conclut, du même coup, la démonstration de la proposition. \square

2.1.2. Systèmes dynamiques abéliens. — Les variétés abéliennes fournissent des exemples fondamentaux de systèmes dynamiques polarisés. Considérons une variété abélienne X sur un corps F , c'est-à-dire une variété projective munie d'une structure de groupe algébrique. Pour tout entier n , la multiplication par n , notée $[n]$, définit un endomorphisme de X . Le théorème du cube, voir par exemple MUMFORD (1974), entraîne que pour tout fibré en droites symétrique \mathcal{L} , le fibré en droites $[n]^* \mathcal{L}$ est isomorphe à \mathcal{L}^{n^2} .

Les points pré périodiques d'un tel système dynamique sont les points de torsion de X . L'intérêt de cette remarque est double : si elle suggère d'employer des méthodes de systèmes dynamiques pour aborder des questions arithmétiques ou géométriques concernant les points de torsion d'une variété abélienne, elle permet aussi d'envisager la théorie des systèmes dynamiques polarisés comme une *extension* de la théorie arithmético-géométrique des variétés abéliennes.

Plus généralement, on appellera *système dynamique abélien* un système dynamique de la forme (X, f) , où X est une variété abélienne et $f: X \rightarrow X$ un endomorphisme de la variété algébrique X , c'est-à-dire la composition d'un endomorphisme φ de X comme variété abélienne et d'une translation par un point x_0 de X . Lorsque $\varphi - \text{id}$ est surjectif, ce qui sera le cas si X est simple et $\varphi \neq \text{id}$ (ou, plus généralement si pour toute sous-variété abélienne $Y \neq 0$ de X , $\alpha|_Y \neq \text{id}_Y$), alors le système dynamique (X, f) est conjugué au système (X, φ) .

Il convient d'observer qu'un système dynamique abélien n'est en général pas polarisé, par exemple lorsque X est un produit $X_1 \times X_2$ et que $f = f_1 \times f_2$ est donné par la multiplication par deux entiers n_1 et n_2 distincts sur chacun des facteurs.

2.1.3. Systèmes dynamiques toriques. — Soit d un entier tel que $d \geq 2$. On définit un

système dynamique sur l'espace projectif \mathbf{P}^k en posant $f([x_0 : \cdots : x_k]) = (x_0^d : \cdots : x_k^d)$. C'est un système dynamique polarisé car $f^* \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(d)$; il est de poids d . Soit G l'ouvert de \mathbf{P}^k où aucune coordonnée homogène ne s'annule; si l'on fixe la coordonnée homogène x_0 égale à 1, on voit que G est isomorphe au tore algébrique $(\mathbf{G}_m)^k$, où $\mathbf{G}_m = \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$ est le groupe multiplicatif.

De la sorte, \mathbf{P}^k apparaît comme une *compactification* de G , compactification qui n'est pas du tout arbitraire car la multiplication de G , à savoir l'application $m: G \times G \rightarrow G$ qui définit la structure de groupe sur $(\mathbf{G}_m)^k$, s'étend en une action de G sur \mathbf{P}^k , donnée par $(u, x) \mapsto [x_0 : u_1 x_1 : \cdots : u_k x_k]$ si $u = (u_1, \dots, u_k) \in G$ et $x = [x_0 : \cdots : x_k] \in \mathbf{P}^k$.

Plus généralement, on appelle *variété torique* une variété X , disons projective et lisse, contenant un tore algébrique G comme ouvert dense, de sorte que la multiplication de G s'étende en un morphisme de $G \times X$ dans X . Le complémentaire de G dans X est alors un diviseur D , d'ailleurs un diviseur canonique⁽³⁾ de X . Pour tout entier $d \geq 2$, l'endomorphisme $u \mapsto u^d$ de G s'étend en un morphisme $f: X \rightarrow X$ pour lequel $f^* \mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X(dD)$. On obtient de la sorte un système dynamique polarisé de poids d , si ce n'est que $\mathcal{O}_X(D)$ n'est pas forcément ample — il appartient néanmoins à l'intérieur du cône effectif de X .⁽⁴⁾ De tels systèmes dynamiques seront appelés *toriques*.

Observons que pour $u \in \mathbf{C}$, la suite $(u^{d^n})_n$ ne prend qu'au plus une fois chaque valeur si u n'est pas une racine de l'unité, et ne prend qu'un nombre fini de valeurs sinon. Autrement dit, les points prépériodiques de ces systèmes dynamiques qui sont contenus dans G s'identifient aux k -uplets (u_1, \dots, u_k) de racines de l'unité.

Lorsque $X = \mathbf{P}^k$, observons d'ores et déjà une remarquable propriété de la hauteur naturelle vis à vis de ces endomorphismes :

LEMME 2.1.4. — Pour $x = [x_0 : \cdots : x_k] \in \mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ et $d \in \mathbf{N}$, on a

$$h([x_0^d : \cdots : x_k^d]) = d h([x_0 : \cdots : x_k]).$$

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la définition de la hauteur, compte-tenu du fait que pour tout corps valué K et toute famille (x_0, \dots, x_k) d'éléments de K ,

$$\max(|x_0|^d, \dots, |x_k|^d) = \max(|x_0|, \dots, |x_k|)^d.$$

□

C'est un premier exemple, d'ailleurs fondamental, de hauteur *normalisée* par rapport à un système dynamique.

Les systèmes dynamiques toriques ou abéliens ne sont pas les plus intéressants du strict point de vue de la théorie des systèmes dynamiques; en revanche, les questions arithmétiques qu'ils suscitent sont souvent fondamentales.

⁽³⁾C'est-à-dire le diviseur d'une k -forme différentielle méromorphe, où k est la dimension de X , supposée lisse.

⁽⁴⁾De toutes façons, la théorie des variétés toriques montre que l'image inverse par f de tout diviseur E est linéairement équivalente à dE ; les constructions ci-dessous ne dépendent pas substantiellement du choix d'un diviseur ample E .

2.1.5. Éléments de classification. — Soit (X, f, \mathcal{L}) un système dynamique polarisé. Supposons que X soit lisse et géométriquement connexe. D'après le lemme 4.1 de FAKHRUDDIN (2003), voir aussi CANTAT (2003), la dimension de Kodaira d'une telle variété X est négative ou nulle. Supposons que $\text{kod}(X) = 0$. Alors, une puissance du fibré canonique de X est trivial, et en caractéristique 0, on peut démontrer que (X, f) est déduit d'un système dynamique abélien (X', f') par passage au quotient par l'action d'un groupe fini agissant sans point fixe sur X' . La démonstration utilise un théorème de BEAUVILLE (1983), voir aussi BOGOMOLOV (1974*a,b*), reposant sur la solution de YAU (1978) à la conjecture de CALABI, à savoir l'existence d'une métrique kählérienne Ricci plate sur X .

La classification en dimension 2 est essentiellement due à NAKAYAMA (2002) (voir aussi FUJIMOTO (2002), ainsi que FUJIMOTO & NAKAYAMA (2005) pour l'analogie non kählérien) et fait l'objet d'une proposition (prop. 2.3.1) de ZHANG (2006), article de synthèse sur le thème de cette conférence et dont je recommande la lecture. Les surfaces qui portent un système dynamique polarisé sont :

- les surfaces abéliennes ;
- les surfaces hyperelliptiques possédant une revêtement étale par le produit de deux courbes elliptiques ;
- les surfaces toriques ;
- les surfaces réglées sur une courbe elliptique associées, soit à un fibré de rang 2 de la forme $\mathcal{O} \oplus \mathcal{M}$, où \mathcal{M} soit, ou bien de torsion, ou bien de degré non nul, soit à un fibré indécomposable de degré impair.

Citons enfin un résultat de BEAUVILLE (2001), reposant sur des idées de AMERIK *et al.* (1999), selon lequel une hypersurface lisse de degré au moins 3 de l'espace projectif de dimension au moins 3 n'admet aucun endomorphisme de degré > 1 .

Pour plus de détails, je renvoie à l'article de Serge CANTAT dans ce volume.

B. Hauteur normalisée

Soit (X, f, \mathcal{L}) un système dynamique polarisé défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Notons d son poids ; c'est l'unique entier ≥ 2 tel que $f^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^d$.

À la suite de CALL & SILVERMAN (1993), eux-mêmes inspirés par la normalisation de NÉRON (1965) et TATE (voir LANG (1995)) dans le cas où X est une variété abélienne, le but de ce paragraphe est de définir, une *hauteur normalisée* relative au fibré en droites \mathcal{L} .

Les résultats qui suivent sont des généralisations directes des propositions correspondants du §1.1. Leur démonstration est identique.

PROPOSITION 2.1.6. — (Rappelons que $d \geq 2$.) *Il existe une unique hauteur relative à \mathcal{L} , $\hat{h}_{\mathcal{L}}: X(\overline{\mathbf{Q}}) \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\hat{h}_{\mathcal{L}}(f(x)) = d \hat{h}_{\mathcal{L}}(x)$ pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$.*

Démonstration. — Notons E l'espace affine des hauteurs relatives à \mathcal{L} sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$; son espace vectoriel directeur est l'espace \mathcal{F}_b des fonctions bornées de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ dans \mathbf{R} . Munissons \mathcal{F}_b de la norme uniforme et l'espace affine E de la distance induite. C'est un espace métrique complet.

L'application $T: \varphi \mapsto \frac{1}{d}\varphi \circ f$ est linéaire et applique E dans lui-même. En effet, si h est une hauteur relative à \mathcal{L} , $h \circ f$ est une hauteur relative à $f^*\mathcal{L}$ (prop. 1.3.7) donc $h \circ f - dh$ est bornée. Par suite, $T(f) = \frac{1}{d}h \circ f$ est une hauteur relative à \mathcal{L} sur X .

Cette application T est contractante, de constante de Lipschitz au plus $1/d < 1$. Elle possède donc un unique point fixe dans E . \square

La fonction $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ dont la proposition précédente affirme l'existence et l'unicité est appelée *hauteur normalisée*, ou hauteur canonique. On a aussi la formule

$$(2.1.7) \quad \hat{h}_{\mathcal{L}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} h(f^n(x)),$$

pour toute hauteur h relative à \mathcal{L} sur X . La hauteur normalisée vérifie les propriétés suivantes :

PROPOSITION 2.1.8. — a) On a $\hat{h}_{\mathcal{L}}(x) \geq 0$ pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$;
 b) un point $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ vérifie $\hat{h}_{\mathcal{L}}(x) = 0$ si et seulement s'il est prépériodique ;
 c) pour tout nombre entier D et tout nombre réel B , l'ensemble de points $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ de degré au plus D et tels que $\hat{h}_{\mathcal{L}}(x) \leq B$ est fini.

Démonstration. — La propriété c) résulte immédiatement de ce que $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ est une hauteur relative à un fibré en droites ample sur X et du corollaire 1.4.2. Comme les hauteurs relatives à un fibré en droites ample sont minorées, la propriété a) est manifeste sur la formule (2.1.7) ci-dessus. Comme au §1.1, elle se déduit aussi, ainsi que la propriété b), de l'assertion de finitude.

Soit en effet $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$. On a $\hat{h}(f^n(x)) = d^n \hat{h}(x)$. Si x est prépériodique, il existe des entiers $n \geq 0$ et $p \geq 1$ tels que $f^n(x) = f^{n+p}(x)$. Par suite, $d^n \hat{h}_{\mathcal{L}}(x) = d^{n+p} \hat{h}_{\mathcal{L}}(x)$, d'où $\hat{h}_{\mathcal{L}}(x)$ car $d \geq 2$. Inversement, si $\hat{h}_{\mathcal{L}}(x) \leq 0$, les termes de la suite $(f^n(x))$ forment un ensemble de points de hauteur normalisée au plus B , tous définis sur le corps $\mathbf{Q}(x)$; un tel ensemble est fini d'après c). Il existe donc des entiers $n \geq 0$ et $p \geq 1$ tels que $f^n(x) = f^{n+p}(x)$. Autrement dit, x est prépériodique et $\hat{h}_{\mathcal{L}}(x) = 0$. \square

Voici, d'après NORTHCOTT (1950), une conséquence remarquable de la proposition précédente.

COROLLAIRE 2.1.9. — Soit (X, f, \mathcal{L}) un système dynamique polarisé défini sur un corps de nombres K . Pour tout entier D , les points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ qui sont prépériodiques et dont le degré est au plus D forment un ensemble fini.

Il convient de remarquer ici que, sous les hypothèses du théorème, l'ensemble des points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ qui sont périodiques est dense dans X pour la topologie de Zariski (proposition 2.2.1). Il y en est *a fortiori* de même de l'ensemble des points prépériodiques.

Lorsque, de plus, X est une variété abélienne, la hauteur normalisée obtenue est appelée *hauteur de Néron–Tate*. La compatibilité d'une telle hauteur avec la loi de groupe de X est assez remarquable : en effet, cette hauteur $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ est une fonction de degré ≤ 2 sur le groupe $X(\overline{\mathbf{Q}})$, au sens où l'identité suivante est vérifiée :

$$(2.1.10) \quad \hat{h}_{\mathcal{L}}(x+y+z) - \hat{h}_{\mathcal{L}}(y+z) - \hat{h}_{\mathcal{L}}(z+x) - \hat{h}_{\mathcal{L}}(x+y) + \hat{h}_{\mathcal{L}}(x) + \hat{h}_{\mathcal{L}}(y) + \hat{h}_{\mathcal{L}}(z) - \hat{h}_{\mathcal{L}}(0) = 0$$

pour tout triplet (x, y, z) de points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$. Une telle fonction est la somme d'une forme quadratique $q_{\mathcal{L}}$, d'une forme linéaire $\ell_{\mathcal{L}}$ et d'une constante (exercice 2.4.9). Dans le cas où les fibrés en droites \mathcal{L} et $[-1]^*\mathcal{L}$ sont isomorphes, on dit que \mathcal{L} est symétrique et l'on a $\ell_{\mathcal{L}} = 0$; dans le cas antisymétrique où \mathcal{L} et $[-1]^*\mathcal{L}$ sont inverses l'un de l'autre, on a $q_{\mathcal{L}} = 0$.

D'autre part, lorsque $X = \mathbf{P}^1$ et f est l'endomorphisme $[x : y] \mapsto [x^d : y^d]$ pour d un entier ≥ 2 , la hauteur normalisée n'est autre que la hauteur naturelle sur \mathbf{P}^1 . Les points prépériodiques pour ce système dynamique sont $[0 : 1]$, $[1 : 0]$ et les points $[1 : \xi]$ où $\xi \in \mathbf{C}$ est une racine de l'unité. Modulo l'identification entre hauteur d'un point $[1 : \xi]$ et mesure de Mahler $M(P)$ du polynôme minimal P de ξ , on en déduit le théorème suivant, dont la première partie est essentiellement due à KRONECKER. Voir aussi l'exercice 1.6.5 pour une version effective.

COROLLAIRE 2.1.11. — *Soit P un polynôme irréductible à coefficient entiers.*

- a) *Si $M(P) = 0$, les racines de P sont des racines de l'unité ou 0.*
- b) *Lorsque $n \rightarrow \infty$, le degré du corps engendré sur \mathbf{Q} par une racine primitive n -ième de l'unité tend vers l'infini.*

En fait, toutes les racines primitives n -ièmes de l'unité sont conjuguées sur \mathbf{Q} (GAUSS) puisque le polynôme cyclotomique Φ_n est irréductible. Comme l'indicatrice d'EULER $\varphi(n)$ tend vers l'infini avec n , cela redonne la seconde assertion. La première assertion peut également être précisée en disant qu'un polynôme irréductible $P \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $M(P) = 0$ est, au signe près, ou bien égal à X , ou bien égal à un polynôme cyclotomique.

C. Normalisation des hauteurs locales

On a étudié au paragraphe 1.5 les décompositions de la hauteur d'un point en somme de termes locaux, indexés par les places de K . Dans le cas d'un système dynamique polarisé, il est naturel de se demander si la hauteur normalisée est justiciable d'une telle décomposition dont chaque terme serait plus ou moins canonique. Dans le cas des variétés abéliennes, la normalisation obtenue remonte à NÉRON (1965).

Revenons donc à la théorie des hauteurs locales en nous plaçant sur un corps K , supposé valué complet et algébriquement clos. Soit X une variété projective sur K , $f : X \rightarrow X$ un endomorphisme de X et soit D un diviseur de Cartier sur X tel que f^*D soit linéairement équivalent à dD , où d est un entier ≥ 2 . Autrement dit, dans le cas où D est ample, $(X, f, \mathcal{O}(D))$ est un système dynamique polarisé.

Il y a deux façons pour définir une fonction de Green canonique relativement à D . La première, due à CALL & SILVERMAN (1993), procède d'un raisonnement au niveau des fonctions; la seconde, due à ZHANG (1995b), construit des métriques canoniques. Je mélange ici les deux points de vue, les espaces affines des fonctions de Green pour un diviseur D n'étant que l'image par $\log|\cdot|$ du torseur des métriques hermitiennes continues sur $\mathcal{O}(D)$.

PROPOSITION 2.1.12. — Soit $\alpha \in K(X)$ tel que $f^*D = dD + \text{div}(\alpha)$. Il existe une unique fonction de Green \hat{g}_D relativement à D telle que

$$\hat{g}_D(f(x)) = d\hat{g}_D(x) - \log|\alpha(x)|$$

pour tout $x \in X(K)$ qui n'appartient ni à D ni à f^*D .

Démonstration. — L'ensemble des fonctions de Green pour D est un espace affine de direction l'espace vectoriel des fonctions continues bornées sur $X(K)$. La norme sup de la différence de deux fonctions de Green définit alors une distance sur cet espace qui en fait un espace métrique complet. Si g est une fonction de Green pour D , $T(g) = \frac{1}{d}(g \circ f + \log|\alpha|)$ en est une autre. L'application $g \mapsto T(g)$ est contractante, de constante de Lipschitz au plus $1/d < 1$. Elle admet donc un unique point fixe dans l'ensemble des fonctions de Green pour D . \square

Exemple 2.1.13. — Supposons que D soit la section hyperplane $X_0 = 0$ de l'espace projectif $X = \mathbf{P}^k$. D'après la structure des endomorphismes de l'espace projectif, il existe des polynômes (F_0, \dots, F_k) de $K[X_0, \dots, X_k]$, homogènes de degré d et sans zéro commun non trivial dans \bar{K} , tels que $f([x_0 : \dots : x_k]) = [F_0(x) : \dots : F_k(x)]$, pour tout point $[x_0 : \dots : x_k]$ de \mathbf{P}^k . Notons $F = (F_0, \dots, F_k)$ l'endomorphisme de l'espace affine de dimension $k+1$ qui relève f . Pour $n \geq 0$, notons $F^n = (F_0^n, \dots, F_k^n)$ le n -ième itéré de f ; il relève f^n . En outre, les polynômes F_j^n (pour $0 \leq j \leq k$) sont de degré d^n et sans zéro commun non trivial.

Comme D est le diviseur des zéros de la « fonction » x_0 , f^*D est celui de F_0 ; notant α la fraction rationnelle $F_0(x)/x_0^d$, on a $f^*D = dD + \text{div}(\alpha)$. La fonction $g = -\log(|x_0| / \max(|x_0|, \dots, |x_k|))$ est une fonction de Green pour D ; toute autre fonction de Green en diffère d'une fonction continue. La démonstration itérative du théorème du point fixe montre que la fonction de Green canonique pour g est la limite des fonctions de Green

$$\begin{aligned} g_n(x) &= -\frac{1}{d^n} g \circ f^n(x) + \frac{1}{d^n} \log|\alpha \circ f^{n-1}| + \dots + \frac{1}{d} \log|\alpha(x)| \\ &= -\frac{1}{d^n} \log \frac{|F_0^n(x)|}{\max(|F_0^n(x)|, \dots, |F_k^n(x)|)} + \sum_{m=1}^n \frac{1}{d^m} \log \frac{|F_0^m(x)|}{|F_0^{m-1}(x)|^d} \\ &= \frac{1}{d^n} \log \max(|F_0^n(x)|, \dots, |F_k^n(x)|) - \log|x_0|. \end{aligned}$$

Pour tout $x = (x_0, \dots, x_k)$ non nul, posons

$$G_n(x) = \frac{1}{d^n} \log \max(|F_0^n(x)|, \dots, |F_k^n(x)|).$$

Les calculs qui précèdent entraînent que G_n converge vers une fonction G définie sur le complémentaire de l'origine dans l'espace affine et vérifiant les propriétés suivantes :

$$G(\lambda x) = \log|\lambda| + G(x), \quad G(F(x)) = dG(x).$$

On l'appelle la *fonction de Green homogène*; elle est reliée à la fonction de Green canonique pour le diviseur D par la relation $g_D(x) = G(x) - \log|x_0|$.

Supposons $K = \mathbb{C}$. Alors, G est plurisousharmonique dans $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ et est pluriharmonique sur l'image réciproque de l'ensemble de Fatou de f ; voir SIBONY (1999), §1.6. Lorsque K est un corps ultramétrique, KAWAGUCHI & SILVERMAN (2007b) démontrent que G est localement constante sur l'image réciproque de l'ensemble de Fatou de f .

Le théorème suivant affirme que ces fonctions de Green normalisées forment une famille admissible, donc donnent lieu comme annoncé à une décomposition de la hauteur normalisée d'un point en somme de termes locaux.

THÉORÈME 2.1.14. — *Soit (X, f, \mathcal{L}) un système dynamique polarisé défini sur un corps de nombres K . Soit D un diviseur tel que $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}(D)$ et soit $\alpha \in K(X)$ tel que $f^*D = dD + \text{div}(\alpha)$. Pour toute place v de K , notons \hat{g}_v la fonction de Green sur le corps \mathbb{C}_v pour le diviseur D , normalisée relativement à α , ainsi que \hat{h}_v la hauteur locale associée.*

Alors, la famille (\hat{g}_v) est admissible et, pour tout $x \in (X \setminus D)(\overline{\mathbb{Q}})$, on a

$$\hat{h}_{\mathcal{L}}(x) = \sum_{v \in M_K} \varepsilon_v \hat{h}_v(x).$$

(Comme au paragraphe 1.5, si v est une place de K , on note ε_v le nombre de plongements du corps K dans \mathbb{C}_v qui induisent la valeur absolue correspondant à v .)

Démonstration. — La famille (\hat{g}_v) de fonctions de Green normalisées est obtenue en itérant à partir d'une famille admissible (g_v^0) fixée l'opérateur $T: (g_v) \mapsto (\frac{1}{d}(g_v \circ f + \log|\alpha|_v))$. D'après le lemme 1.5.5, cet opérateur applique une famille admissible de fonctions de Green sur une autre famille admissible. Plus précisément, d'après cette proposition, cet opérateur fixe presque toutes les composantes g_v . Autrement dit, on a $\hat{g}_v = g_v^0$ pour presque toute place v . Cela démontre précisément que la famille (\hat{g}_v) est admissible.

Notons h' la somme des hauteurs locales associées ; d'après la proposition 1.5.6, c'est la restriction au complémentaire de D d'une hauteur pour ce diviseur. Pour montrer que c'est bien la hauteur normalisée, il suffit donc de vérifier l'équation fonctionnelle qui la caractérise.

Soit v une place de K . Pour tout point $x \in X(\mathbb{C}_v)$ tel que $x \notin D$ et $f(x) \notin D$, on a $\hat{g}_v(f(x)) = d\hat{g}_v(x) - \log|\alpha(x)|_v$. Par suite, si un point $P \in X(\overline{K})$ est tel que $P \notin D$ et $f(P) \notin D$, on a les égalités

$$\hat{h}_v(f(P)) = d\hat{h}_v(P) - \frac{1}{[K(P):K]} \log|N_{K(P)/K}(\alpha(x))|_v.$$

En sommant ces égalités et en utilisant la formule du produit, on en déduit $h'(f(P)) = dh'(P)$. Pour traiter le cas général, on considère un diviseur E linéairement équivalent à D qui ne contienne ni P ni $f(P)$ auquel on applique l'analyse précédente. \square

D. Hauteurs locales sur \mathbb{C} et mesures canoniques

Conservons les notations du paragraphe précédent en supposant de plus que $K = \mathbb{C}$ et que D est un diviseur ample.

Il possède alors une fonction de Green de classe \mathcal{C}^∞ , g_D , dont la forme associée $\omega_D = \text{dd}^c g_D + \delta_D$ est une forme de Kähler. D'après le théorème de WIRTINGER, la mesure $(\omega_D)^k$ est positive, de masse totale égale à l'auto-intersection $(D)^k$ de D (si D est une section hyperplane, ce n'est autre que le degré de X , c'est-à-dire le nombre de points d'intersection avec X d'une droite assez générale de \mathbf{P}^k).

La démonstration du théorème du point fixe de Picard fait intervenir les itérés $T^n(g_D)$ de g_D sous l'opérateur T et montre leur convergence vers la fonction de Green \hat{g}_D , unique solution de $T(\hat{g}_D) = \hat{g}_D$. Notons que l'on a

$$\text{dd}^c T(g_D) + \delta_D = \frac{1}{d} \text{dd}^c (g_D \circ f) + \delta_D + \frac{1}{d} \delta_{\text{div}(\alpha)} = \frac{1}{d} f^* \omega_D.$$

Autrement dit, la forme associée à $T(g_D)$ est encore de Kähler. Un argument standard de courants positifs de masse bornée entraîne que $\text{dd}^c \hat{g}_D + \delta_D$ est un courant positif fermé sur X , qu'on note $\hat{\omega}_D$. C'est la limite des formes positives de type $(1, 1)$, $\frac{1}{d^n} (f^n)^* \omega_D$. En outre, la suite des mesures $(d^{-n} (f^n)^* \omega_D^k)_n$ converge vers une mesure, notée $(\hat{\omega}_D)^k$ sur $X(\mathbf{C})$. Cette dernière écriture $(\hat{\omega}_D)^k$ est rendue licite par la théorie des produits de courants positifs fermés localement donnés par le dd^c d'une fonction psh continue, telle que décrite dans DEMAILLY (1993).

On appelle *mesure canonique* associée au système dynamique polarisé (X, f, \mathcal{L}) la mesure de probabilité $(\hat{\omega}_D)^k / (D)^k$. Dans le cas des variétés abéliennes, cette mesure canonique est la mesure de Haar normalisée. Dans le cas d'un système dynamique torique, par exemple \mathbf{P}^k muni de l'endomorphisme donné par l'élévation des coordonnées homogènes à une même puissance $d \geq 2$, il s'agit de même de la mesure de Haar normalisée du sous-groupe compact maximal $(\mathbf{S}^1)^k$ de $(\mathbf{C}^*)^k$.

Pour plus de détails et des exemples plus intéressants du point de vue ergodique, je renvoie aux articles de CANTAT et GUEDJ dans ce volume.

Une propriété topologique de ces mesures aura des conséquences importantes plus bas : elles ne chargent pas les sous-ensembles algébriques stricts (et plus généralement les sous-ensembles pluripolaires), cf. l'article de GUEDJ, théorème 3.1. En particulier, leur support est dense pour la topologie de Zariski. Ce dernier fait est facile à constater dans les deux exemples (abéliens et toriques) explicités ci-dessus.

E. Extensions

La construction de hauteurs normalisées peut être étendue de plusieurs manières.

1) Par additivité des hauteurs relativement à des fibrés en droites, on peut définir une hauteur relativement à un élément de $\text{Pic}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. L'intérêt est que cet ensemble peut contenir de nouvelles classes vérifiant des propriétés permettant l'application des idées évoquées ci-dessus.

C'est ainsi que sur certaines surfaces K3, SILVERMAN (1991), CALL & SILVERMAN (1993), et, à leur suite, BILLARD (1997), construisent une hauteur normalisée pour l'action d'automorphismes. Leur construction a été généralisée dans KAWAGUCHI (2008) au cas des automorphismes d'une surface projective X dont le premier degré

dynamique λ est > 1 (c'est-à-dire, d'après GROMOV (2003)⁽⁵⁾ et YOMDIN (1987), dont l'entropie topologique est strictement positive). Dans tous les cas, il s'agit d'établir l'existence de deux diviseurs à coefficients rationnels D_+ et D_- vérifiant $f^*(D_+) \sim \lambda D_+$ et $f^*(D_-) \sim \lambda^{-1} D_-$. Suivant CANTAT (2001), cela se démontre en considérant l'action de f sur les espaces vectoriels $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ et $\text{Pic}(X)_{\mathbf{R}}$, en notant que cette action préserve $\text{Pic}(X)$, la forme d'intersection et le cône des diviseurs nef (l'adhérence du cône ample). On démontre (voir MCMULLEN (2002)) que les valeurs propres sont des nombres de Salem : λ est un nombre algébrique, λ^{-1} en est un conjugué et tous les autres conjugués sont de module 1.

Ils en déduisent des théorèmes de finitude pour les points prépériodiques de degré donné sur X . Dans le cas général considéré par KAWAGUCHI (2008), il s'agit seulement d'une hauteur relative à un fibré en droites *big* et *nef* ; il apparaît ainsi une sous-variété exceptionnelle, les points prépériodiques de laquelle on ne peut rien dire.⁽⁶⁾

2) En général, il n'y a pas de hauteur normalisée pour l'action d'une application rationnelle, pas plus que de théorème de finitude pour les points prépériodiques, cf. l'exercice 2.4.1. Un certain nombre d'auteurs, SILVERMAN (1994), DENIS (1995), MARCELLO (2003), KAWAGUCHI (2006), ont étudié tout particulièrement le cas des automorphismes polynomiaux de l'espace affine. (Ceux-ci définissent des automorphismes birationnels de l'espace projectif auxquels la théorie précédente ne s'étend pas *a priori*.) Considérons un automorphisme f du plan affine \mathbf{A}^2 . Il est donné par deux polynômes ; notons $d(f)$ le maximum de leurs degrés. Le n -ième itéré f^n de f possède de même un degré et l'on définit le *degré dynamique* $\delta(f)$ de f comme la limite de $d(f^n)^{1/n}$. Cette limite existe et est un entier naturel qui vérifie $1 \leq \delta(f) \leq d(f)$ (cf. KAWAGUCHI (2006), prop. 3.2).

Le cas $\delta(f) = d(f)$ correspond aux *automorphismes réguliers* pour lesquels les lieux d'indétermination dans \mathbf{P}^2 de f et de f^{-1} ne se rencontrent pas. Lorsque $\delta(f) \geq 2$, KAWAGUCHI (2006) montre l'existence d'une fonction \hat{h} sur $\mathbf{A}^2(\overline{\mathbf{Q}})$ vérifiant les propriétés suivantes, où h désigne la restriction à \mathbf{A}^2 de la hauteur sur \mathbf{P}^2 .

a) il existe des constantes $a > 1$ et $b > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbf{A}^2(\overline{\mathbf{Q}})$, $\frac{1}{a}h(x) - b \leq \hat{h}(x) \leq ah(x) + b$;

b) pour tout $x \in \mathbf{A}^2(\overline{\mathbf{Q}})$, $\hat{h}(f(x)) + \hat{h}(f^{-1}(x)) = (\delta + \frac{1}{\delta})\hat{h}(x)$.

La première propriété implique que $\mathbf{A}^2(\overline{\mathbf{Q}})$ n'a qu'un nombre fini de points de degré borné et de hauteur bornée. La seconde propriété entraîne que les points prépériodiques sont exactement les points de hauteur nulle.

3) Plus généralement, le contexte des correspondances peut donner lieu à des variations intéressantes.

⁽⁵⁾Bien que publié en 2003, cet article fondamental date de 1977.

⁽⁶⁾Étant donné un endomorphisme f de \mathbf{P}^2 de degré $d \geq 2$, éclatons un point fixe de f en lequel la différentielle de f est l'identité. On obtient une surface X' sur laquelle f s'étend en un endomorphisme qui laisse invariant point par point le diviseur exceptionnel.

§2.2. Quelques conjectures

Soit (X, f, \mathcal{L}) un système dynamique polarisé défini sur un corps de nombres K . Soit $d \geq 2$ l'entier tel que $f^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes d}$. Soit $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ la hauteur normalisée sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$ associée à (X, f, \mathcal{L}) .

Je décris dans ce paragraphe quelques unes des conjectures concernant l'arithmétique des systèmes dynamiques polynomiaux. La plupart de ces énoncés ont fait l'objet d'une étude approfondie depuis les années 1970, au moins dans le cas des systèmes dynamiques abéliens.

A. Rareté des points prépériodiques dans une sous-variété

PROPOSITION 2.2.1. — *L'ensemble des points de X qui sont périodiques pour f est dense dans X pour la topologie de Zariski.*

Démonstration. — Lorsque X est une variété complexe lisse, on peut en donner une démonstration en utilisant les résultats de théorie ergodique démontrés dans les notes de GUEDES de ce volume.⁽⁷⁾

Soit V l'adhérence de l'ensemble des points périodiques de f pour la topologie de Zariski, c'est-à-dire le plus petit ensemble algébrique de X qui contient les points périodiques. L'ensemble $V(\mathbf{C})$ est fermé dans $X(\mathbf{C})$ et contient les points périodiques ; il contient donc l'adhérence de ces points pour la topologie usuelle. D'après le théorème 3.3 de cet article, les points périodiques (répulsifs) de f s'équidistribuent selon la mesure canonique μ_f sur $X(\mathbf{C})$ associée à f . *A fortiori*, $V(\mathbf{C})$ contient le support de la mesure μ_f . Comme cette mesure ne charge pas les parties fermées strictes pour la topologie de Zariski (*loc. cit.*, théorème 3.1), $V(\mathbf{C}) = X(\mathbf{C})$ et $V = X$.

FAKHREDDIN (2003), faisant usage de résultats fondamentaux de HRUSHOVSKI (2004), en donne une démonstration algébrique par réduction au cas où le corps de base est la clôture algébrique d'un corps fini. Il s'agit de montrer que le complémentaire d'une hypersurface Y de X contient un point prépériodique, voire périodique. Voici le principe de la démonstration.

Considérons un « modèle » du système dynamique polarisé (X, f, \mathcal{L}) et de Y sur un anneau A qui est une \mathbf{Z} -algèbre de type fini. Une façon de procéder est d'utiliser la prop. 2.1.1, c'est-à-dire de considérer X comme une sous-variété invariante par un système dynamique d'un espace projectif \mathbf{P}^N et de définir A comme l'anneau engendré par les coefficients, d'une part des polynômes (f_0, \dots, f_N) qui définissent ce système dynamique et d'autre part d'un système d'équations des variétés X et Y . Il convient d'ajouter à cet anneau l'inverse du résultant des polynômes homogènes f_0, \dots, f_N , pour que ces polynômes définissent bien un endomorphisme de l'espace projectif \mathbf{P}_A^N sur A . On peut supposer que Y est la trace d'une section hyperplane de \mathbf{P}_A^N , quitte à agrandir Y de sorte qu'il est défini par une forme linéaire, et à ajouter à A l'inverse d'un coefficient non nul de cette forme.

⁽⁷⁾ Comme nous l'avons rappelé au début de ce chapitre, les différents degrés dynamiques d'un système dynamique polarisé sont dominés par le dernier, cf. SERRE (1960).

On obtient de la sorte un système dynamique polarisé (\mathbf{X}, \mathbf{f}) sur A ainsi qu'une section hyperplane \mathbf{Y} de \mathbf{X} .

Soit \mathfrak{m} un idéal maximal de A et soit κ son corps résiduel. D'après le théorème des zéros de HILBERT, κ est un corps fini. Notons X_κ , f_κ , Y_κ les objets sur le corps κ déduits de \mathbf{X} , \mathbf{f} et \mathbf{Y} par réduction modulo \mathfrak{m} . Si x est un point de $X_\kappa(\overline{\kappa})$, défini sur le corps fini $\kappa(x)$, tous les itérés de x sont aussi définis sur $\kappa(x)$. Par conséquent, l'orbite de x est finie et x est prépériodique. Il existe en particulier des points prépériodiques de $X_\kappa(\overline{\kappa})$ qui n'appartiennent pas à Y_κ . (C'est ici qu'intervient éventuellement le théorème de HRUSHOVSKI (2004) : il affirme que cet ensemble contient des points *périodiques* pourvu que le cardinal de κ soit choisi assez grand.) Soit x un tel point ; supposons $f^n(x) = f^{n+p}(x)$ pour $p > n \geq 0$, et soit Z le sous-schéma de \mathbf{X} défini par la coïncidence de f^n et f^{n+p} .

Nous allons démontrer que *chaque composante irréductible de Z se surjecte sur $\text{Spec } A$* . (Intuitivement, cela signifie que les ensembles de coïncidence se comportent suffisamment bien dans la « famille de systèmes dynamiques » paramétrée par $\text{Spec } A$.) Admettons pour l'instant ce fait. Il existe alors un point ξ dans Z dont l'image est le point générique de $\text{Spec } A$ et dont x est une spécialisation. Un tel point n'appartient pas à \mathbf{Y} et définit un point prépériodique de X , voire périodique si l'on peut prendre $n = 0$, d'où la proposition.

Pour démontrer le résultat admis, commençons par observer que Z est fini sur $\text{Spec } A$. En effet, sur Z , les fibrés en droites $(f^{n+p})^* \mathcal{O}(1)$ et $(f^n)^* \mathcal{O}(1)$ sont isomorphes, donc $\mathcal{O}(d^{n+p}) \simeq \mathcal{O}(d^n)$, ce qui entraîne que le fibré en droites $\mathcal{O}(d^n(d^p - 1))|_Z$ est trivial. Comme il est relativement très ample sur A , Z est affine sur A , c'est donc un schéma fini sur $\text{Spec } A$. Mais Z , égal à l'intersection de la diagonale de $\mathbf{X} \times_A \mathbf{X}$ et de l'image de \mathbf{X} par le couple (f^n, f^{n+p}) , est l'intersection de deux sous-schémas de dimension $\dim X + \dim A$ dans un schéma de dimension $2 \dim X + \dim A$. Par conséquent, ses composantes irréductibles sont de dimension au moins $\dim A$ (appliquer le théorème 3, p. 110, de SERRE (2000) après avoir plongé le tout dans un schéma régulier sur A). Comme le morphisme $Z \rightarrow \text{Spec } A$ est fini, elles sont de dimension exactement $\dim A$. D'après le théorème de constructibilité de CHEVALLEY, l'image d'une telle composante irréductible domine $\text{Spec } A$; par propriété des morphismes finis, l'image d'une telle composante irréductible est fermée dans $\text{Spec } A$, donc égale à $\text{Spec } A$. \square

Plus généralement, soit Y une sous-variété de X qui est prépériodique, c'est-à-dire telle que la suite de sous-variétés $(f^n(Y))$ n'ait qu'un nombre fini de termes distincts. Soit n et p des entiers, avec $p > 0$, tels que $f^n(Y) = f^{n+p}(Y)$. Alors la sous-variété $Y_n = f^n(Y)$ est invariante par f^p , et $(Y_n, f^p, \mathcal{L}|_{Y_n})$ est un système dynamique polarisé, de poids d^k . L'ensemble des points périodiques de f contenus dans Y_n est donc dense dans Y_n pour la topologie de Zariski. Comme $f^n : Y \rightarrow Y_n$ est fini et surjectif, l'ensemble des points périodiques de f contenus dans Y est aussi dense dans Y pour la topologie de Zariski.

Il était tentant de faire la conjecture inverse, d'autant plus que de nombreux résultats non-triviaux concernant les variétés abéliennes et les tores la rendaient plausible. Compte-tenu de contre-exemples récents, nous l'énonçons sous forme interrogative.

CONJECTURE 2.2.2. — Soit (X, f, \mathcal{L}) un système dynamique polarisé sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit Y une sous-variété irréductible de X et soit Y_0 l'adhérence, pour la topologie de Zariski, de l'ensemble des points prépériodiques de X qui appartiennent à Y . Est-il vrai que les composantes irréductibles de Y_0 sont des sous-variétés prépériodiques ?

En d'autres termes, si Y n'est pas elle-même prépériodique, est-il vrai que ses points prépériodiques sont contenus dans une réunion finie de sous-variétés strictes de Y .

Remarquons aussi qu'il s'agit d'une conjecture géométrique. Toutefois, des arguments de spécialisation standard permettent de supposer que ce système dynamique est défini sur un corps de nombres.

L'ensemble des cas connus est mince, essentiellement les systèmes toriques et abéliens, mais à chaque fois la démonstration des théorèmes fut spectaculaire. Nous allons décrire ces exemples importants ci-dessous, puis nous expliquerons les contre-exemples proposés par GHIOCA & TUCKER (2009).

2.2.3. *Systèmes dynamiques abéliens.* — Le cas où X est un système dynamique abélien, f étant l'endomorphisme de multiplication par un entier ≥ 2 , a été conjecturé par MANIN et MUMFORD, semble-t-il motivés par l'ex-conjecture de MORDELL. Elle a été démontrée pour la première fois par RAYNAUD (1983*a,b*) (démonstration de nature arithmétique, p -adique). Dans ce cas, les variétés prépériodiques sont plutôt appelées « sous-variétés de torsion » : il s'agit en effet des translatées des sous-variétés abéliennes de X par un point de torsion, cf. par exemple HINDRY (1988), lemme 10 (et, dans un cas voisin, le lemme 2.2.5 ci-dessous). Citons aussi la solution donnée par HINDRY (1988), suivant une stratégie de S. LANG, stratégie qui requiert des énoncés arithmétiques difficiles sur l'image des représentations galoisiennes associée à la variété abélienne X , dus à SERRE (1986) et qu'il avait exposés dans un cours au Collège de France. (Essentiellement, si X est définie sur un corps de nombres K , il faut savoir que l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/K)$ sur les points de n -torsion de X est assez grosse ; HINDRY (1988) utilise par exemple qu'il existe $c > 0$ de sorte que lorsque n tend vers l'infini, un point d'ordre n a au moins n^c conjugués distincts. Voir aussi la démonstration de la proposition 2.2.6.) Les démonstrations plus récentes de PINK & ROESSLER (2002, 2004) utilisent aussi cet ingrédient, mais pas celle de ROESSLER (2005). Ces trois derniers articles ont été inspirés par la démonstration de HRUSHOVSKI (2001) dans le cas des corps de fonctions ; la théorie des modèles y était un outil important.

2.2.4. *Systèmes dynamiques toriques.* — Le cas des systèmes dynamiques toriques est assez similaire (certaines des références ci-dessus traitent d'ailleurs simultanément les deux cas). Commençons par énumérer les sous-variétés invariantes dans le cas où $X = \mathbf{P}^k$ et $f([x_0 : \cdots : x_k]) = [x_0^d : \cdots : x_k^d]$. Le cas général s'y ramène via la géométrie des variétés toriques. Rappelons que le tore \mathbf{G}_m^k agit sur X par $(u_1, \dots, u_k) \cdot [x_0 : \cdots : x_k] = [x_0 : u_1 x_1 : \cdots : u_k x_k]$.

LEMME 2.2.5. — Soit V une sous-variété irréductible de \mathbf{P}^k , rencontrant \mathbf{G}_m^k , telle qu'il existe un point $\alpha \in \mathbf{G}_m^k$ telle que $f(V) \subset \alpha \cdot V$. Alors V est un translaté d'un sous-tore de \mathbf{G}_m^k , par un point de torsion dans le cas particulier où $\alpha = 1$.

Démonstration, d'après PINK & ROESSLER (2002). — Soit G le stabilisateur de V ; c'est le sous-groupe de \mathbf{G}_m^k formé des $u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbf{G}_m^k$ tels que $u \cdot x \in V$ pour tout $x \in V$.

Supposons d'abord que $G = \{1\}$. Alors, les d^k sous-variétés $u \cdot V$, où u parcourt les points de \mathbf{G}_m^k tels que $u^d = \alpha^{-1}$, sont disjointes et contenues dans $f^{-1}(V)$. Comme le degré de f est d^k , ces sous-variétés décrivent exactement les composantes irréductibles de $f^{-1}(V)$. Le cycle $f^*(V)$ est somme des cycles $u \cdot V$; si \deg désigne le degré d'une sous-variété de l'espace projectif, on a alors $\deg(f^{-1}(V)) = d^k \deg(V)$. D'autre part, comme $f: \mathbf{P}^k \rightarrow \mathbf{P}^k$ est de poids d , le degré du cycle $f^*(V)$ est égal à $d^{\dim V} \deg(V)$. On a donc $\dim V = k$ et $V = \mathbf{P}^k$. Comme le stabilisateur de V est trivial, $k = 0$ et $V = \{1\}$ est un point de torsion.

Dans le cas général, \mathbf{G}_m^k/G est un tore $\mathbf{G}_m^{k'}$. Par construction, l'image de $(V \cap \mathbf{G}_m^k)/G$ dans ce tore $\mathbf{G}_m^{k'}$ a un stabilisateur trivial et est stable par l'élévation à la puissance d . Son adhérence V' dans $\mathbf{P}^{k'}$ vérifie les hypothèses du lemme. Par suite, V/G est un point, et V est un translaté de G , c'est-à-dire $V = \beta \cdot G$.

Alors, $f(V) = \beta^d \cdot G = \alpha \beta \cdot G$. Si $\alpha = 1$, $\beta^{d-1} \in G$. Par « complète réductibilité des tores », on peut alors écrire $\mathbf{G}_m^k = G \cdot G'$, où G' est un sous-tore ; écrivons $\beta = \gamma \gamma'$ avec $\gamma \in G$ et $\gamma' \in G'$. On a $V = \gamma' G$ et l'égalité $\beta^{d-1} = \gamma^{d-1} (\gamma')^{d-1}$ entraîne que γ' est un point de torsion. \square

Comme on l'a mentionné dans le cas des systèmes dynamiques abéliens, une des approches possibles utilise des renseignements de nature galoisienne. Ceux-ci sont notablement pour les tores, car ils réduisent essentiellement à l'irréductibilité des polynômes cyclotomiques. Pour en donner une idée, nous exposons maintenant la démonstration, due à IHARA, SERRE et TATE, du cas d'une courbe dans \mathbf{P}^2 . Notre exposition reprend celle de LANG (1983), p. 160, ainsi que la présentation d'HINDRY (1988).

PROPOSITION 2.2.6. — *Soit V une courbe irréductible du plan projectif complexe qui contient une infinité de points de torsion de \mathbf{G}_m^2 . Alors V est l'adhérence dans \mathbf{P}^2 d'un translaté d'un sous-tore de \mathbf{G}_m^2 par un point de torsion de \mathbf{G}_m^2 .*

De manière plus explicite, $V \cap \mathbf{G}_m^2$ possède alors une équation de la forme $X^a Y^b = u$, où (a, b) est un couple d'entiers relatifs premiers entre eux et u est une racine de l'unité.

Démonstration. — Si V a une équation $F = 0$ dans \mathbf{P}^2 et σ est un automorphisme de \mathbf{C} , on note V^σ la courbe de \mathbf{P}^2 d'équation $F^\sigma = 0$ obtenue en appliquant σ aux coefficients de F . Si $x = [x_0 : x_1 : x_2] \in V$, le point $\sigma(x) = [\sigma(x_0) : \sigma(x_1) : \sigma(x_2)]$ appartient à V^σ .

Soit K_1 le sous-corps de \mathbf{C} engendré par les racines de l'unité ; montrons que V est définie sur K_1 . Soit $F \in \mathbf{C}[X_0, X_1, X_2]$ une équation homogène de V dont un des coefficients est égal à 1 ; montrons que tous les autres coefficients de F appartiennent à K_1 .

Soit σ un automorphisme de \mathbf{C} qui fixe K_1 . Pour tout point de torsion $u = [1 : u_1 : u_2]$ appartenant à V , $\sigma(u) = [1 : \sigma(u_1) : \sigma(u_2)]$ appartient à V^σ ; comme $\sigma(u) = u$, $u \in V^\sigma \cap V$. Par hypothèse, V et V^σ ont une infinité de points d'intersection. D'après le théorème de Bézout, $V^\sigma = V$. Les formes F et F^σ sont alors proportionnelles, donc égales car un des coefficients de F est égal à 1. Par suite, $F \in K_1[X_0, X_1, X_2]$.

Il existe donc une racine de l'unité α tel que les coefficients de F appartiennent à $\mathbf{Q}(\alpha)$; posons $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ et $m = [\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$. Pour la fin de la démonstration, nous allons supposer par l'absurde que V n'est pas un translaté d'un sous-tore et majorer l'ordre d'un point de torsion appartenant à V .

Soit u un point de torsion de V et soit n son ordre. Soit ξ une racine de l'unité d'ordre n ; comme $[\mathbf{Q}(\xi) : \mathbf{Q}] = \varphi(n)$, ξ possède au moins $\varphi(n)/m$ conjugués sur K , donc u possède au moins $\varphi(n)/m$ conjugués sur K qui sont autant de points de torsion d'ordre n situés sur V .

D'après le théorème des nombres premiers, il existe un nombre réel $c_1 > 0$ (indépendant de n) et un nombre premier p ne divisant pas n tel que $p \leq c_1 \log n$. Soit p un tel nombre premier. Il existe un automorphisme σ_1 de \mathbf{C} tel que $\sigma_1(\xi) = \xi^p$; alors $\sigma = \sigma_1^m$ est un automorphisme de \mathbf{C} tel que $\sigma(\xi) = \xi$ et $\sigma(u) = u^d$, où $d = p^m$. Par suite, $\sigma \in \text{Aut}(\mathbf{C}/K)$.

Notons V_d l'image réciproque de V par l'élévation des coordonnées à la puissance d ; on a $u \in V_d$: si $F \in K[X_0, X_1, X_2]$ est une forme qui définit V et $u = [1 : u_1 : u_2]$,

$$F(u^d) = F(1, u_1^d, u_2^d) = F(1, \sigma(u_1), \sigma(u_2)) = F^\sigma(1, \sigma(u_1), \sigma(u_2)) = \sigma(F(u)) = 0,$$

donc $u \in V_d \cap V$. Cela vaut aussi des $\varphi(n)/m$ conjugués qu'on en avait déduit. Comme V est supposé ne pas être une sous-variété de torsion, V n'est pas une composante irréductible de V_d . D'après le théorème de Bézout, on a donc

$$\frac{\varphi(n)}{m} \leq \text{card}(V_d \cap V) \leq (\deg V_d)(\deg V) \leq d^2(\deg V)^2.$$

Par suite,

$$\varphi(n) \leq md^2(\deg V)^2 \leq mc_1^2(\deg V)^2(\log n)^{2m} = c_2(\log n)^{2m}.$$

Comme $\varphi(n) \gg n^{1/2}$ lorsque n tend vers l'infini, cette inégalité implique que l'ordre d'un point de torsion situé sur V est borné. Il n'y a donc qu'un nombre fini de tels points de torsion. \square

2.2.7. Contre-exemples. — Comme je l'ai dit plus haut, la conjecture 2.2.2 n'est pas vraie en toute généralité. En voici un contre-exemple, dû à GHIOCA & TUCKER (2009). Prenons pour X le carré $E \times E$ d'une courbe elliptique E possédant de la multiplication complexe. Pour fixer les idées, supposons que E soit la courbe d'invariant 1728, décrite analytiquement comme le quotient $\mathbf{C}/\mathbf{Z}[i]$, ou par l'équation $y^2 = x^3 - x$. L'intérêt de cette courbe est de disposer de plus d'endomorphismes que les simples multiplications par un entier; précisément, l'anneau de ses endomorphismes est l'anneau $\mathbf{Z}[i]$ des entiers de Gauß. (La « multiplication par i » est donnée par $(x, y) \mapsto (-x, iy)$.) Si $a \in \mathbf{Z}[i]$ n'est pas nul, l'endomorphisme $[a]$ de E est fini et son degré est égal à $|a|^2$ (la norme de a). En outre, si $\mathcal{L} = \mathcal{O}(0)$ est le fibré ample sur E correspondant au diviseur 0, $[a]^*\mathcal{L}$ est isomorphe à $\mathcal{L}^{|a|^2}$. (Lorsque $|a|^2$ est pair, il faut éventuellement remplacer \mathcal{L} par son carré; nous négligeons ce point.)

Pour tout couple (a_1, a_2) d'entiers de Gauß, non nuls, un endomorphisme de la surface X est l'application $f = ([a_1], [a_2])$ qui agit comme la multiplication par a_1 sur la première composante, et par a_2 sur la seconde. Munissons X du fibré en droites ample $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(0 \times E + E \times 0)$. On a $f^*\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(|a_1|^2 0 \times E + |a_2|^2 E \times 0)$. Pour que (X, f, \mathcal{L}) soit

un système dynamique polarisé, il suffit donc que $|a|_1^2 = |a|_2^2$. Prenons par exemple $a_1 = 3 + 4i$ et $a_2 = 5$; on a en effet $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Avec ces choix, on a le contre-exemple suivant à la conjecture 2.2.2 :

PROPOSITION 2.2.8. — *La diagonale de X contient une infinité de points prépériodiques pour le système dynamique polarisé (X, f, \mathcal{L}) , mais n'est pas elle-même une sous-variété prépériodique.*

Démonstration. — Les systèmes dynamiques $(E, [a])$ sont très semblables et leurs points prépériodiques sont les mêmes : les points de torsion de E . En particulier, la diagonale Y de $X = E \times E$, qui contient une infinité de points torsion de la surface abélienne X , contient une infinité de points prépériodiques pour (X, f) . Puisque cette diagonale est de dimension 1, les points prépériodiques y sont alors denses pour la topologie de Zariski.

Si la conjecture 2.2.2 est vraie, cette diagonale Y doit être une sous-variété prépériodique. Démontrons que ce n'est pas le cas. Pour tout entier $p \geq 1$, $f^p(Y) = ([a_1^p], [a_2^p])(Y)$ n'est égal à Y que si $a_1^p = a_2^p$. En effet, la différentielle de $[a_1]$ en l'origine est la multiplication par a_1 dans l'espace tangent T_0E , donc l'espace tangent à $f^p(Y)$ est la droite de vecteur directeur (a_1^p, a_2^p) dans $T_0X = T_0E \times T_0E \simeq \mathbf{C}^2$. Plus généralement, si n et p sont des entiers ≥ 1 , l'égalité $f^{n+p}(Y) = f^n(Y)$ impose que les vecteurs (a_1^{n+p}, a_2^{n+p}) et (a_1^n, a_2^n) soient colinéaires, ce qui n'arrive que si $(a_1/a_2)^p = 1$.

L'affirmation résulte ainsi de ce que le nombre complexe $a_1/a_2 = (3 + 4i)/5$ n'est pas une racine de l'unité. (Dans $\mathbf{Z}[i]$, les racines de l'unité sont ± 1 et $\pm i$; on peut aussi utiliser le fait que le polynôme minimal de a_1/a_2 , égal à $5X^2 - 6X + 5$, n'est pas unitaire, donc a_1/a_2 n'est même pas un entier algébrique.) \square

On peut bien sûr construire d'autres exemples dans la même veine, voir par exemple PAZUKI (2009) pour des produits de surfaces abéliennes. Ces exemples peuvent paraître artificiels : ce ne sont, après tout, que des systèmes dynamiques produits. Ils n'en obligent pas moins à imaginer une nouvelle formulation de la conjecture 2.2.2, d'autant plus qu'ils infirment aussitôt les conjectures 2.2.13 et 2.2.14 qui vont suivre, puisqu'elles renforcent la conjecture 2.2.2.

L'idée qui semble prévaloir est que la source de contre-exemples dénichée par GHIOCA et TUCKER est effectivement la seule obstruction. Dans un travail en cours, GHIOCA, TUCKER et ZHANG vérifient que c'est le cas pour les endomorphismes de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ qui sont de la forme (f_1, f_2) ; s'ils violent la conjecture 2.2.2, ce sont des endomorphismes de Lattès, quotients d'un exemple comme celui que nous avons expliqué.

B. Minoration de la hauteur d'un point qui n'est pas prépériodique

Les points prépériodiques sont de hauteur nulle, et inversement. Mais que peut valoir la hauteur d'un point qui n'est pas prépériodique ? D'après le théorème de finitude de Northcott, elle est strictement positive, et peut être arbitrairement grande. Elle peut aussi être arbitrairement petite. Soit $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ un point qui n'est pas prépériodique; définissons une suite de points (x_n) en posant $x_0 = x$ et où, pour tout n , $x_{n+1} \in X(\overline{\mathbf{Q}})$

est un antécédent de x_n par f . Cette suite est bien définie car l'endomorphisme f est fini et surjectif. Pour tout n , on a $\hat{h}_{\mathcal{L}}(f(x_n)) = dh_{\mathcal{L}}(x_n)$, d'où

$$\hat{h}_{\mathcal{L}}(x_n) = \frac{1}{d^n} \hat{h}_{\mathcal{L}}(x).$$

Cependant, en même temps que la hauteur de x_n décroît, le corps sur lequel ce point est défini est susceptible de croître. En effet, comme f est de degré $d^{\dim X}$, il faut, pour déterminer x_{n+1} , résoudre une équation de degré $d^{\dim X}$. Cette équation n'est peut-être pas irréductible, autrement dit le degré de l'extension $[K(x_{n+1}) : K(x_n)]$ n'est pas forcément égal à $d^{\dim X}$. C'est par exemple le cas si X est un produit $X' \times X''$, $f = (f', f'')$ et $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \boxtimes \mathcal{L}''$, et que la première coordonnée x' du point x est un point fixe de f' . On peut alors choisir x_n de la forme (x'_0, x''_n) et le degré de l'extension $[K(x_{n+1}) : K(x_n)]$ est au plus égal à $d^{\dim X''}$.

On espère néanmoins qu'il est toujours au moins égal à d , du moins en moyenne.

CONJECTURE 2.2.9. — *Existe-t-il un nombre réel $c > 0$ tel que pour tout point $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ qui n'est pas prépériodique,*

$$\hat{h}_{\mathcal{L}}(x) \geq \frac{c}{[K(x) : K]}.$$

La première apparition de cette conjecture concerne la hauteur naturelle sur \mathbf{P}^1 sous la forme d'un *problème* dans LEHMER (1933) : Pour $\varepsilon > 0$, trouver un polynôme unitaire P à coefficients entiers dont la mesure de Mahler vérifie $1 < \exp(\deg(P)M(P)) < 1 + \varepsilon$; il ajoute : « Whether or not the problem has a solution for $\varepsilon < 0,176$, we do not know. » Et nous ne savons toujours pas ! Le meilleur résultat connu dans ce cas est dû à DOBROWOLSKI (1979) ; citons-en une version un peu affaiblie :

PROPOSITION 2.2.10. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $c > 0$ tel que pour tout nombre algébrique ξ qui n'est ni nul ni une racine de l'unité, on ait*

$$h(\xi) \geq \frac{c}{[\mathbf{Q}(\xi) : \mathbf{Q}]^{1+\varepsilon}}.$$

Dans le cas de l'espace projectif \mathbf{P}^k et de l'endomorphisme $f : [x_0 : \cdots : x_k] \mapsto [x_0^d : \cdots : x_k^d]$, pour lequel la hauteur naturelle est une hauteur canonique, AMOROSO & DAVID (2003) ont étendu les méthodes de DOBROWOLSKI (1979). Par ailleurs, DAVID & HINDRY (2000) ont traité le cas des variétés abéliennes à multiplication complexe, généralisant un théorème de LAURENT (1983) qui concernait les courbes elliptiques à multiplication complexe. Ces résultats impliquent immédiatement des théorèmes analogues pour leurs quotients, comme les endomorphismes de Lattès ou de Tchébychev de \mathbf{P}^1 .

Tant DOBROWOLSKI (1979) que les extensions qui s'en inspirent utilisent de manière cruciale que pour beaucoup de nombres premiers p , on peut trouver un endomorphisme du système dynamique qui est « congru modulo p » à l'application polynomiale donnée par l'élévation des coordonnées à la puissance p (ou à un de ses itérés). Dans le cas du problème de LEHMER classique, cet endomorphisme n'est autre que l'application $[x_0 : x_1] \mapsto [x_0^p : x_1^p]$, cette congruence apparaissant par le biais du petit théorème de FERMAT.

En revanche, cette méthode ne peut pas s'étendre à un système dynamique général, même sur \mathbf{P}^1 . En effet, si f et g sont deux fractions rationnelles de degrés ≥ 2 qui commutent, et telles qu'aucun itéré de f n'est égal à aucun itéré de g , alors (\mathbf{P}^1, f) est un endomorphisme déjà traité, c'est-à-dire l'élévation à la puissance d , un endomorphisme de Tchébychev, ou un endomorphisme de Lattès. C'est, à la suite de premiers travaux de FATOU et JULIA, le théorème de RITT (1923) et ERËMENKO (1989), cf. le §7 des notes de MILNOR (2006).

Dans le cas d'un système dynamique abélien général, défini sur un corps de nombres K , MASSER (1984) a démontré une inégalité plus faible, du type : si $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ n'est pas prépériodique,

$$\hat{h}_{\mathcal{L}}(x) \geq \frac{c}{[K(x) : \mathbf{Q}]^{\kappa}},$$

où c et κ sont des constantes explicites. De telles estimations, pourtant bien plus faibles que celle prédite par la conjecture 2.2.9, ne semblent pas connues pour un système dynamique polarisé arbitraire, même en dimension 1.

C. Dénombrement des points prépériodiques

Supposons encore que le système dynamique (X, f, \mathcal{L}) soit défini sur un corps de nombres K . Les points prépériodiques de X qui sont définis sur K sont en nombre fini, d'après le cor. 2.1.9. Est-il possible de contrôler effectivement ce nombre de points ? Précisément :

CONJECTURE 2.2.11. — *Est-il possible de borner le nombre de points K -rationnels de X qui sont prépériodiques en termes uniquement de $[K : \mathbf{Q}]$, de $\dim X$, de d et de $c_1(\mathcal{L})^{\dim X}$?*

D'après le théorème de plongement de FAKHRUDDIN (prop. 2.1.1), il suffit en fait de démontrer le cas où X est un espace projectif et $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$. C'est d'ailleurs dans ce cas particulier que MORTON & SILVERMAN (1994) avaient énoncé cette conjecture.

Commençons par donner quelques cas particuliers qui l'ont motivée.

2.2.12. *Systèmes dynamiques abéliens.* — Le cas des systèmes dynamiques toriques étant un exercice facile (exercice 2.4.7), supposons que X est une variété abélienne principalement polarisée et f la multiplication par 2 dans X . Les points prépériodiques pour f sont alors les points de torsion de X , c'est-à-dire ceux dont un multiple non nul est nul. En effet, $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ est prépériodique, c'est-à-dire si $f^n(x) = f^{n+p}(x)$, avec $n \geq 0$ et $p > 0$, on a $2^n x = 2^{n+p} x$, d'où $2^n(2^p - 1)x = 0$ et x est de torsion. Inversement, si x est annulé par un entier $N > 0$, écrivons $N = 2^n m$, où m est impair. Alors, 2 est inversible dans l'anneau fini $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, et il existe un entier $p > 0$ tel que $2^p \equiv 1 \pmod{m}$. Alors, $2^{n+p}x = 2^n x$ et x est prépériodique.

Dire que X est principalement polarisée par \mathcal{L} signifie exactement que $c_1(\mathcal{L})^{\dim X} = (\dim X)!$. Si de plus \mathcal{L} est symétrique, ce qu'on peut supposer, alors $f^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes 4}$, donc (X, f, \mathcal{L}) est de poids 4. La conjecture revient donc à savoir si le nombre de points de torsion de X qui sont K -rationnels peut être majoré par une constante qui ne dépende que de k et du degré $[K : \mathbf{Q}]$.

La question est déjà remarquablement difficile ! Lorsque $k = 1$, c'est-à-dire pour les courbes elliptiques, elle a été résolue par MAZUR (1977) lorsque $K = \mathbf{Q}$ et en général, après quelques résultats intermédiaires, par MEREL (1996) ; pour $k \geq 2$, elle est encore ouverte.

De manière analogue aux résultats partiels de FLEXOR & OESTERLÉ (1990) en direction du théorème de MEREL (1996), il y a des résultats partiels, citons notamment MORTON & SILVERMAN (1994); CALL & GOLDSTINE (1997); BENEDETTO (2007), où la constante c obtenue dépend du corps K , et non seulement de son degré $[K : \mathbf{Q}]$. Leur démonstration fait intervenir des rudiments de dynamique p -adique.

D. Discrétion des points d'une sous-variété qui ne sont pas prépériodiques

La conjecture suivante fait intervenir la hauteur normalisée. On suppose donc que le système dynamique polarisé (X, f, \mathcal{L}) est défini sur un corps de nombres.

Si Y est une sous-variété prépériodique de X , on a vu que Y contient des points prépériodiques, et même qu'ils sont denses pour la topologie de Zariski. La hauteur normalisée prend donc la valeur 0 sur $Y(\overline{\mathbf{Q}})$. Même si l'on exclut les points prépériodiques, elle prend des valeurs arbitrairement petites car on peut toujours considérer la pré-orbite d'un point, qui est formée de points de hauteurs tendant vers 0. Une question naturelle, posée par BOGOMOLOV (1980) lorsque X est la jacobienne d'une courbe de genre au moins 2 et Y cette courbe, plongée de façon standard, consiste à se demander si ce phénomène est la seule raison pour laquelle la hauteur normalisée peut prendre des valeurs arbitrairement petites sur Y .

CONJECTURE 2.2.13. — *Soit Y une sous-variété de X . L'ensemble des sous-variétés prépériodiques de (X, f) contenues dans Y n'a qu'un nombre fini d'éléments maximaux; notons Y^* leur complémentaire dans Y . De plus, $\inf_{x \in Y^*(\overline{\mathbf{Q}})} \hat{h}_{\mathcal{L}}(x) > 0$.*

Cette conjecture renforce la conjecture 2.2.2 ; les contre-exemples à cette dernière entraînent qu'elle n'est pas vraie en général. Il est à espérer que l'on parviendra à la reformuler convenablement. Remarquablement, les cas particuliers dans lesquels l'une ou l'autre des conjectures 2.2.2 et 2.2.13 sont prouvées sont précisément les mêmes.

Le cas des variétés toriques fut démontré d'abord par ZHANG (1995a) par des techniques de géométrie d'Arakelov combinées au résultat d'IHARA, SERRE et TATE expliqué plus haut. Il fut reprouvé par BILU (1997) comme corollaire d'un théorème d'équidistribution. Nous expliquerons sa démonstration au §3.4 du chapitre 3.

Le cas d'un système dynamique abélien est un théorème de ZHANG (1998), après que ULLMO (1998) eut traité la conjecture de BOGOMOLOV (1980), c'est-à-dire le cas où Y est une courbe algébrique plongée naturellement dans sa jacobienne X . La preuve utilise un théorème d'équidistribution tel que le théorème 2.3.1 ainsi qu'un joli argument de théorie de la mesure, voir le paragraphe 2.3/A. Un peu avant, PHILIPPON (1995) avait traité le cas d'une sous-variété d'un produit de courbes elliptiques.

La conjecture 2.2.13 est aussi vraie pour les produits de tels systèmes dynamiques d'après CHAMBERT-LOIR (2000) (« variétés semi-abéliennes isotriviales »). Voir aussi DAVID & PHILIPPON (1998, 1999, 2000, 2002); AMOROSO & DAVID (2003,

2004, 2006) pour une nouvelle démonstration des cas précédents, ainsi que celui des variétés semi-abéliennes générales qui ne rentre pas tout à fait dans le contexte des systèmes dynamiques polarisés. Notons que ces derniers auteurs démontrent un énoncé *effectif* : pourvu que Y ne soit pas translaté d'une sous-variété semi-abélienne, ils fournissent une valeur explicite pour c , ne dépendant que de la géométrie de X et Y .

Elle est aussi valable pour les quotients de tels systèmes dynamiques (Lattès et autres). Enfin, MIMAR (1997) a traité quelques cas de systèmes dynamiques à variables séparées dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, c'est-à-dire de la forme $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$, où f et g sont deux fractions rationnelles de même degré.

E. Équidistribution vers la mesure canonique des suites de points dont la hauteur normalisée tend vers 0

Soit K un corps de nombres sur lequel le système dynamique polarisé (X, f, \mathcal{L}) est défini. Tout point $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ définit une mesure de probabilité discrète sur $X(\mathbf{C})$, notée δ_x : c'est la moyenne des masses de Dirac aux $[K(x) : K]$ conjugués de x .

CONJECTURE 2.2.14. — *Soit (x_n) une suite de points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ vérifiant les deux hypothèses suivantes :*

- (i) *pour toute sous-variété prépériodique $Y \subsetneq X$, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers n tels que $x_n \in Y$;*
- (ii) *la suite $(\hat{h}_{\mathcal{L}}(x_n))$ des hauteurs normalisées des x_n tend vers 0.*

Est-il vrai que la suite (δ_{x_n}) converge vers la mesure canonique $\hat{\mu}_{\mathcal{L}}$ sur $X(\mathbf{C})$?

Faisons quelques commentaires au travers de deux exemples.

a) Supposons par exemple que $X = \mathbf{P}^1$ et que $f(x) = x^2$; alors les points prépériodiques sont 0, ∞ et les racines de l'unité, la hauteur normalisée $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ n'est autre que la hauteur usuelle et la mesure canonique $\hat{\mu}_{\mathcal{L}}$ est la mesure d'intégration sur le cercle unité. La condition $\hat{h}_{\mathcal{L}}(x_n) \rightarrow 0$ est en particulier vérifiée si l'on prend pour x_n une racine de l'unité, toutes distinctes entre elles. Si x_n est d'ordre d_n , c'est une racine du polynôme cyclotomique Φ_{d_n} , dont on sait qu'il est irréductible de degré $\varphi(d_n)$ (nombre d'entiers entre 1 et d_n qui sont premiers à d_n). Les conjugués de x_n sont ainsi les autres racines primitives d_n -ièmes de l'unité. Si par exemple d_n est un nombre premier, les conjugués de x_n sont les $\exp(2ik\pi/d_n)$, pour $1 \leq k \leq d_n - 1$. Lorsque d_n tend vers l'infini (toujours en étant un nombre premier) la mesure δ_{x_n} correspond à des sommes de Riemann sur le cercle (à l'oubli négligeable près d'une masse de Dirac en 1 divisée par d_n) et converge ainsi vers la mesure de Haar normalisée sur S^1 .

Inversement, la conjecture 2.2.14 appliquée à cet exemple indique que les racines de l'unité sont de grand degré, sorte de version quantitative du théorème affirmant l'irréductibilité des polynômes cyclotomiques.

b) Prenant toujours des points périodiques sur $X = \mathbf{P}^1$, f étant alors arbitraire, cette conjecture est un analogue arithmétique d'un énoncé d'équidistribution classique en

théorie des systèmes dynamiques dû à BROLIN (1965) et LYUBICH (1983), où l'on remplace la mesure δ_{x_n} par la moyenne des masses de Dirac aux points périodiques répulsifs d'ordre d_n tendant vers l'infini. Comme pour les racines de l'unité, la conjecture 2.2.14 implique que ces points périodiques répulsifs se répartissent en relativement peu d'orbites galoisiennes, toutes proches de la mesure d'équilibre.

c) En théorie des systèmes dynamiques, on peut aussi considérer, au lieu de δ_{x_n} , le nuage des itérés inverses $f^{-n}(x_0)$ d'un point initial x_0 . De fait, si $f(x_{n+1}) = x_n$ pour tout n , on a $\hat{h}_{\mathcal{L}}(x_n) = \hat{h}_{\mathcal{L}}(x_0)/d^n$, donc la condition (ii) de la conjecture 2.2.14 est satisfaite. Là encore, cette conjecture tend à affirmer que le nuage $f^{-n}(x_0)$ se répartit en relativement peu d'orbites galoisiennes, toutes proches de la mesure d'équilibre.

d) Incidemment, il ne semble pas facile de produire une suite (x_n) de points vérifiant la condition $\hat{h}_{\mathcal{L}}(x_n) \rightarrow 0$ sans combiner les deux approches précédentes — points périodiques et préimages itérées.

PROPOSITION 2.2.15. — *La conjecture 2.2.14 implique la conjecture 2.2.13.*

Démonstration. — Soit Y une sous-variété irréductible de X qui n'est pas prépériodique.

Commençons par montrer qu'il n'existe dans Y qu'un nombre fini de sous-variétés prépériodiques maximales. Dans le cas contraire, on pourrait en effet construire une suite (Y_n) de sous-variétés irréductibles prépériodiques de X contenues dans Y , telle que pour tout n , Y_n ne soit pas contenue dans la réunion de Y_1, \dots, Y_{n-1} et telle que toute sous-variété prépériodique de (X, f) qui est contenue dans Y soit contenue dans l'une des Y_n .

Alors $Y_n \cap (Y_1 \cup \dots \cup Y_{n-1})$ est un fermé de Zariski strict de Y_n ; il existe donc un point $y_n \in Y_n(\overline{\mathbf{Q}})$ qui est prépériodique mais qui n'appartient pas à Y_m si $m < n$. On a $\hat{h}_{\mathcal{L}}(y_n) = 0$. Supposant la conjecture 2.2.14 vérifiée, la suite de mesures discrète (δ_{y_n}) converge vers la mesure canonique $\hat{\mu}_{\mathcal{L}}$ sur $X(\mathbf{C})$. Mais comme $y_n \in Y$ pour tout n , les supports des mesures (δ_{y_n}) sont contenus dans la partie fermée $Y(\mathbf{C})$ de $X(\mathbf{C})$. Par suite, le support de leur mesure limite est lui-aussi contenu dans $Y(\mathbf{C})$. La contradiction vient de ce que la mesure $\hat{\mu}_{\mathcal{L}}$ ne charge pas les sous-ensembles algébriques stricts (théorème 3.1 du texte de GUEDJ, voir aussi plus haut, paragraphe 2.1/D).

Cela démontre que la réunion Y_0 des sous-variétés prépériodiques de (X, f) qui sont contenues dans Y est une partie fermée de Y . On a $Y_0 \neq Y$ puisque Y n'est pas prépériodique. Supposons que $\hat{h}_{\mathcal{L}}(x)$ prenne des valeurs arbitrairement petites lorsque $x \in Y(\overline{\mathbf{Q}})$ mais $x \notin Y_0$. Soit (y_n) une suite de points de $Y(\overline{\mathbf{Q}})$ n'appartenant pas à Y_0 telle que $\hat{h}_{\mathcal{L}}(y_n) \rightarrow 0$. Comme précédemment, la contradiction apparaît en considérant la suite de mesures $(\delta(y_n))$ supportées par $Y(\mathbf{C})$: cette suite converge en effet vers la mesure canonique $\hat{\mu}_{\mathcal{L}}$, donc son support est contenu dans $Y(\mathbf{C})$ bien qu'il soit Zariski-dense dans $X(\mathbf{C})$. \square

§2.3. Un théorème d'équidistribution et ses applications

La géométrie d'Arakelov a fourni une voie d'attaque très efficace de la conjecture d'équidistribution (conjecture 2.2.14). Le point de départ en est le théorème d'équidistribution ci-dessous, dû aux travaux successifs de SZPIRO *et al.* (1997), AUTISSIER (2001) puis pour finir YUAN (2008). (Voir aussi BILU (1997); RUMELY (1999); CHAMBERT-LOIR (2000) pour des démonstrations alternatives lorsque $X = \mathbf{P}^1$.)

THÉORÈME 2.3.1 (Yuan). — *Soit (x_n) une suite de points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ vérifiant les deux hypothèses suivantes :*

(i) *pour toute sous-variété $Y \subsetneq X$, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers n tels que $x_n \in Y$;*

(ii) *la suite $(\hat{h}_{\mathcal{L}}(x_n))$ des hauteurs normalisées des x_n tend vers 0.*

Alors, la suite (δ_{x_n}) converge vers la mesure canonique $\hat{\mu}_{\mathcal{L}}$ sur $X(\mathbf{C})$.

Par rapport à la conjecture 2.2.14, seule la première hypothèse est modifiée car le quantificateur porte maintenant sur toutes les sous-variétés de Y . On peut quand même remarquer que la conjecture 2.2.13 et le théorème 2.3.1 réunis impliquent de manière évidente la conjecture d'équidistribution 2.2.14. En effet, si (x_n) est une suite vérifiant les hypothèses de la conjecture 2.2.14 et Y une sous-variété de X qui n'est pas préperiodique, la conjecture 2.2.13 interdit qu'une infinité de termes de la suite (x_n) soit contenue dans Y .

Tel quel, ce théorème n'a apparemment aucune conséquence sur les conjectures de ce chapitre. Toutefois, ULLMO (1998) et ZHANG (1998), par une très belle astuce qui consiste à appliquer ce théorème dans deux situations reliées et à comparer les résultats obtenus, ont pu en déduire les conjectures 2.2.13 et 2.2.14 pour les systèmes dynamiques issus de variétés abéliennes. J'explique cela au paragraphe suivant.

Je donne ensuite quelques indications sur la preuve du théorème 2.3.1 et conclus en décrivant succinctement sa variante non-archimédienne, due à CHAMBERT-LOIR (2006); BAKER (2006); BAKER & RUMELY (2006); FAVRE & RIVERA-LETÉLIER (2006). Pour ces deux derniers points, le lecteur n'y trouvera pas de démonstrations, au mieux une esquisse des idées qui jalonnent les preuves.

En revanche, je détaille au chapitre 3 de ce texte la preuve, d'après BAKER (2006), du théorème 2.3.1 lorsque X est la droite projective. J'y exposerai aussi la démonstration, due à BILU (1997), de la conjecture d'équidistribution 2.2.14 pour les systèmes dynamiques toriques.

A. Du théorème d'équidistribution à la conjecture de Bogomolov

Présentons brièvement dans un cas simple comment ULLMO (1998) et ZHANG (1998) déduisent du théorème d'équidistribution 2.3.1 (ou plutôt sa version pour les sous-variétés de variétés abéliennes) une preuve de la conjecture 2.2.13 dans le cas des variétés abéliennes.

Soit X une variété abélienne sur un corps de nombres, et h une hauteur de Néron-Tate (voir p. 44) sur X relativement à un fibré en droites ample et symétrique \mathcal{L} , autrement dit une hauteur normalisée pour l'endomorphisme de multiplication par 2. Cette

hauteur est attachée à une métrique hermitienne sur \mathcal{L} et la forme de courbure ω qui lui est associée est une forme de Kähler.

Soit Y une sous-variété de X qui n'est pas une translatée de sous-variété abélienne par un point de torsion. Il s'agit de prouver qu'il n'existe pas dans $Y(\overline{\mathbf{Q}})$ de suite (y_n) telle que $h(y_n)$ tende vers 0 et telle que l'ensemble $\{y_n\}$ soit dense dans Y pour la topologie de Zariski.

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'une telle suite. Supposons aussi pour simplifier que $Y - Y = X$, c'est-à-dire que tout point de X soit la différence de deux points de Y ; notons d la dimension de Y et k celle de X .

D'après le théorème d'équidistribution, la suite (δ_{y_n}) a pour point adhérent la mesure $(\omega|Y)^d / \deg(Y)$, où $\deg(Y)$ désigne le degré de Y relativement à \mathcal{L} . Quitte à considérer une sous-suite de la suite (y_n) , on suppose que la suite (δ_{y_n}) converge vers cette mesure.

Par ailleurs, les points $y_n - y_m$, pour m, n parcourant \mathbf{N} décrivent un sous-ensemble de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ qui est dense pour la topologie de Zariski. En outre, les propriétés élémentaires de la hauteur de Néron-Tate entraînent que $h(y_n - y_m)$ tend vers 0 lorsque n et m tendent tous deux vers l'infini. En outre, on peut extraire de la suite double $(y_n - y_m)_{n,m}$ une suite $(y_{n_k} - y_{m_k})$ à laquelle le théorème d'équidistribution s'applique. Il en résulte que la suite $(\delta_{y_n - y_m})$ a la mesure $(\omega)^k / \deg(X)$ pour point adhérent.

Si $f: Y \times Y \rightarrow X$ désigne le morphisme de différence, $(y, y') \mapsto y - y'$, on en déduit que les mesures (ω^k) et $f_*((\omega(y)|Y)^d \otimes (\omega(y')|Y)^d)$ sont proportionnelles.

La contradiction provient de ce que la première mesure est une honnête mesure de Lebesgue sur $X(\mathbf{C})$, tandis que la seconde a des singularités dues au défaut de lissité du morphisme f . Cette mesure est en effet définie par intégration de la mesure de Lebesgue $(\omega(y)|Y)^d \otimes (\omega(y')|Y)^d$ dans les fibres du morphisme f ; or, ces fibres sont génériquement de dimension $2d - k$, mais certaines sont de dimension strictement supérieure, c'est par exemple le cas de celle en l'origine o qui, égale à la diagonale de $Y \times Y$, est de dimension $d > 2d - k$. Lorsque r tend vers 0, le volume d'une petite boule de rayon r autour de o dans $X(\mathbf{C})$ est de l'ordre de $r^{2\dim X}$; en revanche, le volume de son image réciproque par f est au moins égal à $r^{2(\text{codim } f^{-1}(o))/\mu}$, où μ est la multiplicité générique de la fibre $f^{-1}(o)$, comme on le voit en évaluant la contribution d'un voisinage d'un point général de cette fibre. Puisque $\text{codim } f^{-1}(o) = \dim Y - \dim f^{-1}(o) < \dim X$, il vient *a fortiori* $(\text{codim } f^{-1}(o))/\mu < \dim X$, et ces deux volumes ont des comportements asymptotiques différents lorsque r tend vers 0. (Voir aussi le lemme 4.3 de DAVID & PHILIPPON (1998) pour un énoncé dans ce sens.)

ULLMO (1998) et ZHANG (1998) raisonnent un peu différemment et utilisent d'autres morphismes. Dans le cas d'ULLMO (1998), Y est une courbe plongée dans sa jacobienne X ; si g est le genre de Y , il considère alors le g -ième produit symétrique de Y , c'est-à-dire le quotient de Y^g par l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_g et le morphisme $f: Y^{(g)} \rightarrow X$ déduit de la loi d'addition sur X . Ce morphisme est birationnel mais n'est pas un isomorphisme, puisque son application tangente est de rang 1 en tout point de la diagonale.

ZHANG (1998) se ramène d'abord au cas où le stabilisateur de Y est trivial dans X et considère alors le morphisme f de Y^m dans X^{m-1} défini par $(y_1, \dots, y_m) \mapsto (y_2 - y_1, \dots, y_m - y_1)$ que FALTINGS (1991) avait déjà considéré dans sa démonstration de la conjecture de LANG pour les sous-variétés de variétés abéliennes. Si m est un entier assez grand, ce morphisme est birationnel ; ce n'est pas un isomorphisme puisque la diagonale de Y^m est envoyée sur l'origine de X^{m-1} .

Notons $f: Y' \rightarrow X'$ le morphisme ainsi défini. D'après le théorème d'équidistribution appliqué deux fois, à la source et au but de f , à des suites bien choisies construites à partir de la suite initiale (y_n) , on en déduit l'égalité de deux mesures sur $X'(\mathbb{C})$. Sur un ouvert dense de $X'(\mathbb{C})$ au-dessus duquel f est un isomorphisme, ces mesures proviennent de formes différentielles. On en déduit une égalité de formes différentielles de degré maximal sur un ouvert dense de $Y'(\mathbb{C})$, donc partout. Cependant, l'une de ces formes ne s'annule pas, tandis que l'autre, image inverse d'une forme différentielle sur X par f s'annule là où le jacobien du morphisme non lisse f s'annule.

Pour plus de détails, je renvoie aux articles originaux, ainsi qu'à l'exposé d'ABBES (1997) au Séminaire Bourbaki.

Cette astuce de considérer un morphisme dont les fibres n'ont pas toutes la même dimension a été reprise par DAVID & PHILIPPON (1998) qui ont donné une nouvelle démonstration de la conjecture 2.2.13 pour les variétés abéliennes (et, par la suite, dans plusieurs autres cas, voir DAVID & PHILIPPON (1999, 2000, 2002)).

En revanche, jusqu'à présent, personne n'a réussi à en tirer parti hors des situations liées aux groupes algébriques, à plus forte raison pour un système dynamique polarisé général.

B. Vers le théorème d'équidistribution

Dans ce paragraphe, je voudrais donner quelques indications de la méthode de démonstration du théorème 2.3.1. La théorie dans laquelle s'écrit cette preuve est la *géométrie d'Arakelov*, une théorie de l'intersection pour les variétés algébriques sur les anneaux d'entiers de corps de nombres, considérées comme analogues des variétés algébriques fibrées au-dessus d'une courbe projective. Inventée dans le cas des surfaces arithmétiques par ARAKELOV (1974) et FALTINGS (1984), elle a été développée de manière systématique par H. GILLET et C. SOULÉ dans une série d'articles. Citons notamment GILLET & SOULÉ (1990*a,b*, 1992), la monographie SOULÉ *et al.* (1992), ainsi que les notes de FALTINGS (1992).

De même que la formule du produit (prop. 1.2.5) fait intervenir les valeurs absolues archimédiennes, la géométrie d'Arakelov ajoute de manière systématique aux objets issus de la géométrie algébrique sur des anneaux d'entiers de corps de nombres des données de nature analytique. Par exemple, les fibrés en droites sont systématiquement munis de métriques hermitiennes.

Ainsi que l'a montré FALTINGS (1991), cette théorie fournit un cadre conceptuel efficace pour étudier la théorie des hauteurs relatives à un fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$:

de même que toute sous-variété d'une variété projective dispose d'un degré relativement à un fibré en droites. toute variété X dispose alors d'une hauteur $h_{\overline{\mathcal{L}}}(X)$. Ceci est développé en grand détail dans l'article de BOST *et al.* (1994).

En outre, en ajoutant à ce formalisme de fibrés en droites hermitiens des objets construits via un processus limite dans l'esprit de celui qui définit les hauteurs canoniques, ZHANG (1995b) a montré que l'on peut y étudier la hauteur normalisée définie par un système dynamique polarisé (X, f, \mathcal{L}) et l'étendre en une notion de hauteur normalisée pour les sous-variétés. Notant d le *poids* de ce système dynamique, l'équation $\hat{h}_{\mathcal{L}}(f(x)) = d\hat{h}_{\mathcal{L}}(x)$ vérifiée par tout point $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ devient $\hat{h}_{\mathcal{L}}(f_*(Z)) = d^{p+1}\hat{h}_{\mathcal{L}}(Z)$, si Z est une sous-variété irréductible de X de dimension p . Dans cette formule, $f_*(Z)$ désigne l'image de Z au sens des cycles ; c'est un multiple de $f(Z)$. Par exemple, on a $f_*(X) = d^p X$, d'où l'on déduit que $\hat{h}_{\mathcal{L}}(X) = 0$. Plus généralement, les sous-variétés prépériodiques (*i.e.*, les sous-variétés Y telles qu'il existe des entiers n et $m > 0$ tels que $f^n(Y) = f^{n+m}(Y)$) sont de hauteur normalisée nulle.

La question de la réciproque a été posée par PHILIPPON (1991) pour des variétés abéliennes. Il avait introduit dans cet article une notion de hauteur pour les sous-variétés et, dans le contexte des variétés abéliennes, démontré l'existence d'une hauteur normalisée ; ses arguments sont cependant généraux. Étendue aux systèmes dynamiques polarisés, la conjecture qu'il y proposait est la suivante, d'ailleurs équivalente à la conjecture 2.2.13 d'après ZHANG (1995b) (voir aussi SZPIRO (1990)).

CONJECTURE 2.3.2. — *Soit (X, f, \mathcal{L}) un système dynamique polarisé défini sur un corps de nombres. Si Y est une sous-variété de X telle que $\hat{h}_{\mathcal{L}}(Y) = 0$, alors Y est prépériodique.*

Un des slogans de la géométrie d'Arakelov consiste à rechercher un analogue « arithmétique » à chaque théorème de géométrie algébrique. La recette peut sembler assez banale : écrire le théorème considéré dans le cas d'une fibration au-dessus d'une courbe projective et comprendre quels termes analytiques doivent être adjoints à la situation arithmétique analogue. Toutefois, la réalisation en est presque toujours très ardue !

En géométrie algébrique, le théorème de HILBERT–SAMUEL peut s'énoncer comme suit : soit M une sous-variété de dimension k et de degré D de l'espace projectif \mathbf{P}^N ; lorsque n tend vers l'infini, le nombre maximum de polynômes homogènes de degré n linéairement indépendants sur M est équivalent à $Dn^k/k!$. De manière équivalente, si M est une variété de dimension k et \mathcal{L} un fibré en droites ample sur M , la dimension de l'espace $H^0(M, \mathcal{L}^{\otimes n})$ est équivalente à $(c_1(\mathcal{L})^k | M)n^k/k!$ lorsque n tend vers l'infini. Une façon (peu économique) de le démontrer consiste à déduire du théorème de RIEMANN–ROCH (sous la forme due à HIRZEBRUCH–GROTHENDIECK) le résultat correspondant pour la caractéristique d'Euler

$$\chi(M, \mathcal{L}^{\otimes n}) := \sum_{i=0}^k (-1)^i h^i(M, \mathcal{L}^{\otimes n}) \sim \frac{n^k}{k!} (c_1(\mathcal{L})^k | M)$$

puis à invoquer le théorème d'annulation de Serre selon lequel $h^i(M, \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$ pour $i > 0$ et n assez grand.

L'analogue en géométrie d'Arakelov de ce théorème de HILBERT–SAMUEL a été démontré par GILLET & SOULÉ (1988, 1992) au moyen de leur « théorème de Riemann-Roch arithmétique » et d'estimées analytiques dues à BISMUT & VASSEROT (1989). (Voir aussi la démonstration, directe et plus élémentaire, de ABBES & BOUCHE (1995), ainsi que l'extension de ZHANG (1995b).) Selon ce théorème, un fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ « semi-positif » sur une variété arithmétique X possède, quitte à le remplacer par une de ses puissances, une section globale s de norme sup. contrôlée par la hauteur $h_{\overline{\mathcal{L}}}(X)$.

On en déduit l'*inégalité fondamentale* : si le fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ est « semi-positif », alors pour toute suite (x_n) de points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ telle qu'aucune sous-variété stricte de X n'en contienne une sous-suite, on a l'inégalité

$$\liminf h_{\overline{\mathcal{L}}}(x_n) \geq \frac{h_{\overline{\mathcal{L}}}(X)}{(1 + \dim X) \deg_{\mathcal{L}}(X)}.$$

Sans donner la définition précisément, disons quelques mots de l'hypothèse « semi-positif ». C'est un analogue en géométrie d'Arakelov d'un fibré en droites sur l'espace total d'une fibration au-dessus d'une courbe pour lequel toute courbe contenue dans une fibre aurait un degré positif ou nul. Dans cette analogie, la partie analytique qui concerne les métriques hermitiennes stipule que le courant de courbure de la métrique hermitienne est un courant positif. Signalons aussi qu'elle est vérifiée dans le cas qui nous concerne principalement dans ce texte, à savoir les hauteurs normalisées associées à un système dynamique polarisé.

Dans le cas d'un système dynamique polarisé, c'est précisément au travers de cette inégalité que ZHANG (1995b) établit une relation entre les conjectures 2.2.13 et 2.3.2. En effet, appliquée, non pas à X , mais à une sous-variété Y , elle entraîne que si $\hat{h}_{\mathcal{L}}(Y) > 0$, alors l'ensemble des points de $Y(\overline{\mathbf{Q}})$ de hauteur normalisée assez petite n'est pas dense pour la topologie de Zariski. L'autre implication résulte de l'analogue arithmétique du théorème de NAKAI–MOISHEZON que démontre ZHANG (1995b) et qui implique une inégalité dans l'autre sens.

Considérons l'inégalité fondamentale dans le cas d'un système dynamique polarisé (X, f, \mathcal{L}) . Comme on l'a vu, le membre de droite est nul. SZPIRO *et al.* (1997) déduisent alors de cette inégalité un *principe variationnel*. Si (x_n) une suite pour laquelle on a égalité, ils écrivent l'inégalité analogue où le fibré $\overline{\mathcal{L}}$ est remplacé par le fibré $\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon u)$ obtenu en multipliant la métrique hermitienne par $\exp(-\varepsilon u)$, où u est une fonction \mathcal{C}^∞ sur $X(\mathbf{C})$ et ε un petit paramètre. Si $\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon u)$ est encore « semi-positif », on trouve

$$\liminf \left(h_{\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon u)}(x_n) \right) \geq \frac{h_{\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon u)}(X)}{(1 + \dim X) \deg_{\mathcal{L}}(X)}.$$

Revenant à la définition des hauteurs, on en tire l'inégalité

$$\liminf \left(h_{\overline{\mathcal{L}}(x_n)} + \varepsilon \delta_{x_n}(u) \right) \geq \frac{h_{\overline{\mathcal{L}}}(X)}{(1 + \dim X) \deg_{\mathcal{L}}(X)} + \varepsilon \mu_{\overline{\mathcal{L}}}(u) + O(\varepsilon^2).$$

Puisque, par hypothèse, $h_{\overline{\mathcal{L}}}(x_n)$ tend vers le premier terme du second membre, il vient

$$\liminf_n (\varepsilon \delta_{x_n}(u)) \geq \varepsilon \mu_{\overline{\mathcal{L}}}(u) + O(\varepsilon^2).$$

Divisant cette relation par ε et faisant tendre ε vers 0, par valeurs supérieures ou inférieures, on obtient que $\delta_{x_n}(u)$ tend vers $\mu_{\overline{\mathcal{L}}}(u)$, c'est-à-dire le théorème d'équidistribution (théorème 2.3.1) puisque $h_{\overline{\mathcal{L}}} = \hat{h}_{\mathcal{L}}$.

Dans l'argument précédent, nous avons supposé que les petites perturbations $\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon u)$ sont effectivement justiciables de l'inégalité fondamentale. Cela couvre en particulier le cas des systèmes dynamiques abéliens et constitue le résultat principal de SZPIRO *et al.* (1997). En effet, dans ce cas, le courant de courbure $c_1(\overline{\mathcal{L}})$ évoqué plus haut est en fait une forme hermitienne définie positive sur le fibré tangent de la variété abélienne complexe $X(\mathbf{C})$, et toute modification assez petite de cette forme est encore définie positive.

Le cas général est dû à YUAN (2008) qui démontre un analogue en géométrie d'Ara-kelov d'un critère de SIU (1993) pour que la différence de deux fibrés en droites amples soit *gros*, et en particulier qu'une de ses puissances possède une section globale non nulle. De même, YUAN prouve que les fibrés en droites hermitiens requis pour mettre en œuvre le principe variationnel possèdent des sections globales de norme sup. contrôlée, et en déduit qu'on peut leur appliquer l'inégalité fondamentale.

C. Analogues non archimédiens

Le point de vue sur les hauteurs que nous avons décrit met toutes les valeurs absolues d'un corps de nombres sur le même plan, qu'elles soient archimédiennes ou non. La question d'un analogue non archimédien des théorèmes d'équidistribution se pose alors naturellement : fixons un nombre premier p et, pour $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$, considérons la mesure de probabilité δ_x sur l'espace topologique $X(\mathbf{C}_p)$, toujours définie par les conjugués de x ; si (x_n) est une suite de points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ vérifiant les hypothèses du théorème 2.3.1, que peut-on dire du comportement des suites de mesures (δ_{x_n}) ?

Posé tel quel, le problème n'est en fait pas très intéressant. En effet, dans le cas le plus simple possible où l'on prend pour X la droite projective munie de l'application d'élévation au carré (qui redonne la hauteur naturelle), les suites de mesures de probabilité en question ne convergent pas dans l'espace des mesures de probabilité. Le point est que cet espace n'est pas compact pour la topologie de la convergence étroite, car le corps \mathbf{C}_p n'est pas localement compact.

Les espaces analytiques introduits par BERKOVICH (1990) permettent de remédier à ce problème. Par exemple, la droite analytique $A_{\mathbf{C}_p}^1$ sur \mathbf{C}_p , complémentaire du point à l'infini de la droite projective $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_p}^1$ sur \mathbf{C}_p , est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur l'anneau $\mathbf{C}_p[T]$ qui étendent la valeur absolue p -adique sur \mathbf{C}_p , munie de la « topologie spectrale » la moins fine pour laquelle les applications naturelles, $\text{ev}_P : v \mapsto v(P)$ de $A_{\mathbf{C}_p}^1$ dans \mathbf{R} , sont continues pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}_p[T]$. Parmi ces semi-normes, on trouve bien sûr celles de la forme $v_t : P \mapsto |P(t)|_p$, où t est un

point de \mathbf{C}_p , mais il en est bien d'autres, par exemple la *norme de Gauß* $\|\cdot\|_\Gamma$ définie par

$$\|P\|_\Gamma = \max(|a_0|_p, \dots, |a_n|_p), \quad (P = a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n).$$

Que cette norme soit multiplicative est une observation au fondement de toute géométrie analytique p -adique et découle du lemme de Gauß selon lequel $\|PQ\|_\Gamma = 1$ si P et Q sont deux polynômes de $\mathbf{C}_p[T]$ tels que $\|P\|_\Gamma = \|Q\|_\Gamma = 1$.)

Dans CHAMBERT-LOIR (2006), je construis pour tout système dynamique polarisé (X, f, \mathcal{L}) sur un corps p -adique une mesure canonique $\mu_{\mathcal{L}}$ sur l'espace analytique associé à X au sens de BERKOVICH. Dans le cas du système dynamique torique sur \mathbf{P}^1 , pour lequel $f([x : y]) = [x^2 : y^2]$, cette mesure n'est autre que la mesure de Dirac supportée par le point Γ associé à la norme de Gauß. Une adaptation du principe variationnel décrit au paragraphe précédent me permet alors de démontrer un théorème d'équidistribution p -adique des points de petite hauteur lorsque X est de dimension 1 ; le cas général est dû à YUAN (2008). Dans les deux cas, le théorème qui est démontré est un énoncé général d'équidistribution en géométrie d'Arakelov qui dépasse donc le strict cas des systèmes dynamiques polarisés. Par une méthode de théorie du potentiel inspirée de BILU (1997), FAVRE & RIVERA-LETÉLIER (2006) et BAKER & RUMELY (2006) ont traité indépendamment le cas où X est la droite projective et BAKER & PETSCHKE (2005) celui où X est une courbe elliptique.

Ces mesures en géométrie non-archimédienne peuvent aussi être définies lorsque le corps de base est un corps de fonctions d'une variable. L'analogue du théorème 2.3.1 est alors valable. En analysant précisément les mesures obtenues, GUBLER (2007) a démontré quelques cas de l'analogue de la conjecture 2.2.13 sur un corps de fonctions.

Indépendamment de ce courant de pensée de géométrie d'Arakelov, ces dernières années ont vu l'apparition d'une théorie ergodique sur un corps ultramétrique pour laquelle je renvoie aux notes des exposés de YOCCOZ dans ce volume.

§2.4. Exercices

Exercice 2.4.1. — a) On définit une application rationnelle σ de \mathbf{P}^2 dans lui-même en associant à un point de coordonnées homogènes $[x : y : z]$ le point de coordonnées homogènes $[yz : zx : xy]$. Cette application est définie dès qu'au moins deux des coordonnées x, y, z ne sont pas nulles, c'est-à-dire en dehors des trois points de \mathbf{P}^2 correspondant aux trois axes de coordonnées. Cette application est de degré 2 mais pour tout $x \in \mathbf{P}^2(\overline{\mathbf{Q}})$ où σ est définie, on a $\sigma \circ \sigma(x) = x$ — c'est une involution (« involution de CREMONA »). En particulier, tout point de $\mathbf{P}^2 \setminus E$ est prépériodique.

b) Soit $u = [\ell_1 : \ell_2 : \ell_3]$ un automorphisme linéaire de \mathbf{P}^2 et posons $\tau = u^{-1} \circ \sigma \circ u$. C'est encore une involution rationnelle de \mathbf{P}^2 , définie par des polynômes $[F_1 : F_2 : F_3]$ de degré 2. Si le groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, agissant sur les coefficients des formes linéaires ℓ_i , permute ces trois formes linéaires, alors les polynômes F_i définissant τ sont à coefficients rationnels.

c) Le lieu d'indétermination E' de τ est l'image réciproque par u de E . Déterminer un automorphisme u de sorte que $E' \cap \mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$ soit vide. Alors, les polynômes F_i n'ont

pas de zéro commun dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$ sans pour autant que l'inégalité de la prop. 1.1.3 du chapitre 1 soit valide. Pourquoi cela ne contredit-il pas cette proposition ?

Exercice 2.4.2 (KAWAGUCHI (1999)). — Soit $f: X \rightarrow X$ un endomorphisme d'une variété projective et soit \mathcal{L} un fibré en droites ample sur X . On suppose que $f^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}$ est ample. Alors, il existe un nombre réel $c > 0$ tel que pour tout point $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ qui est prépériodique pour f , $h_{\mathcal{L}}(x) < c$. Par conséquent, le théorème 2.1.9 s'étend à ce contexte (un peu) plus général. (Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ ($f^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1})^n \otimes \mathcal{L}^{-1}$ est ample. En déduire qu'il existe un nombre réel a tel que $h_{\mathcal{L}}(f(x)) \geq (1 + \frac{1}{n})h_{\mathcal{L}}(x) - a$ pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$.)

Exercice 2.4.3 (LEWIS (1972)). — Par linéarité, on étend la notion de hauteur aux 0-cycles (c'est-à-dire aux combinaisons linéaires formelles de points). Soit f et g des endomorphismes d'un espace projectif \mathbf{P}^n tels que $\deg(f) > \deg(g)$.

a) Montrer qu'il existe une unique hauteur \hat{h} relative au fibré $\mathcal{O}(1)$ sur \mathbf{P}^n telle que $\hat{h}(f_* g^* x) = \deg(f) \hat{h}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$. (Dans cette formule, f_* et g^* désignent les applications déduites de f et g au niveau des 0-cycles, voir FULTON (1998), chapitre 1.)

b) Soit X une partie de $\mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$ stable par $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/K)$ telle que $g|_X$ est injective et $g(X) \subset f(X)$. Montrer que les éléments de X sont de hauteur bornée.

c) En déduire que pour tout corps de nombres K , il n'y a pas de partie infinie $X \subset \mathbf{P}^n(K)$ tels que $g|_X$ soit injective et $g(X) \subset f(X)$.

Exercice 2.4.4 (POONEN (1999)). — Soit $f: X \rightarrow X$ un endomorphisme d'une variété projective et soit \mathcal{L} un fibré en droites ample sur X . Soit h une fonction hauteur pour \mathcal{L} . On suppose qu'il existe des nombres réels $a > 1$ et b tel que $h(f(x)) \geq ah(x) - b$ pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$.

a) Montrer qu'il existe des nombres réels $c > 1$ et $M > 0$ tels que l'on ait $h(f(x)) \geq ch(x)$ pour tout x tel que $h(x) \geq M$.

b) Pour tout point $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ qui n'est pas prépériodique, la suite $(h(f^n(x)))$ tend vers l'infini.

c) Pour $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$, on note $N(x)$ le plus petit entier n tel que $h(f^n(x)) \geq M$, s'il en existe, ou $+\infty$ sinon. On dit qu'une suite (x_k) de points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ est de *petite hauteur* si la suite $(N(x_k))$ tend vers l'infini.

Supposons qu'il existe une hauteur normalisée \hat{h} associée à f , c'est-à-dire une fonction \hat{h} sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$ telle que $\hat{h} - h$ soit bornée et que $\hat{h}(f(x)) = \lambda h(x)$ pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$. Montrer que $\lambda > 1$. Montrer qu'une suite (x_k) est de petite hauteur si et seulement si $\hat{h}(x_k) \rightarrow 0$ (d'où la terminologie!).

Exercice 2.4.5. — Cet exercice propose quelques cas (plus ou moins) faciles du problème de Lehmer. Soit ξ un nombre algébrique qui n'est ni nul ni une racine de l'unité ; soit P son polynôme minimal. On rappelle que la mesure de Mahler de P est égale à $\exp(h(\xi)[\mathbf{Q}(\xi) : \mathbf{Q}])$.

a) Si ξ n'est pas un entier algébrique, de même que son inverse, alors $M(P) \geq 2$.

b) Si ξ est totalement réel, c'est-à-dire si toutes les racines de P sont réelles, alors $M(P) \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1/2}$; SCHINZEL (1974/75). Démonstration de HÖHN & SKORUPPA (1993) :

pour $x \in \mathbf{R}$, observer l'inégalité

$$\max(1, |x|) \geq |x|^{1/2} |x - 1/x|^{1/2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{1/2}.$$

Exercice 2.4.6. — a) Soit M un espace métrique complet et soit u, v deux applications continues contractantes de M dans M . Si u et v commutent, leurs points fixes respectifs coïncident.

b) Soit X une variété algébrique projective, soit f et g des endomorphismes de X , soit \mathcal{L} un fibré en droites sur X et d, e des entiers ≥ 2 tels que $f^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes d}$ et $g^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes e}$. Si f et g commutent, les hauteurs normalisées relatives à \mathcal{L} associées à f et g coïncident.

Cela s'applique notamment aux systèmes dynamiques toriques et abéliens.

Exercice 2.4.7. — Soit (X, f, \mathcal{L}) un système dynamique torique et soit G le tore sous-jacent.

a) Soit K un corps de nombres; soit n le cardinal du groupe des racines de l'unité contenues dans K . Montrer que $\varphi(n) \leq [K : \mathbf{Q}]$; en déduire que n est majoré par une constante ne dépendant que de $[K : \mathbf{Q}]$.

b) Soit X une variété torique projective lisse de dimension k , soit G le tore sous-jacent à X et soit f l'endomorphisme de X qui prolonge l'endomorphisme $u \mapsto u^2$ de G . Montrer que les composantes irréductibles du diviseur $D = X \setminus G$ sont stables par f et sont encore des systèmes dynamiques toriques. Majorer en terme de $c_1(\mathcal{L})^k$ le nombre de ces composantes.

c) Montrer que la restriction de la conjecture 2.2.11 à la classe des systèmes dynamiques toriques est vraie.

Exercice 2.4.8. — Soit X une variété projective sur un corps K , munie de deux endomorphismes f et g . On suppose que le système dynamique $(X \times X, f \times f)$ vérifie la conjecture 2.2.2. On fait enfin l'hypothèse qu'il existe un ensemble Z de points de X , dense dans X pour la topologie de Zariski, tel que pour tout $z \in Z$, z et $g(z)$ soient prépériodiques pour f .

a) En appliquant l'énoncé de la conjecture 2.2.2 au graphe Γ_g de g dans $X \times X$, montrer qu'il existe des entiers a et b , avec $a > 0$, tels que $f^b g f^a = f^{a+b} g$.

b) Soit d un entier au moins égal à 2 et soit α un élément non nul de K . Démontrer qu'un polynôme $P \in K[X_0, \dots, X_k]$ qui vérifie une équation de la forme $P(X_0^d, \dots, X_k^d) = \alpha P(X)^d$ n'a qu'un seul monôme.

c) On revient au contexte de l'exercice en supposant que $X = \mathbf{P}^k$ et que f est l'élévation des coordonnées à une certaine puissance $d \geq 2$, de sorte que les points de X qui sont prépériodiques pour f sont les points à coordonnées racines de l'unité. Montrer qu'il existe des monômes G_0, \dots, G_k et des racines de l'unité ζ_0, \dots, ζ_k , tels que $g([x_0 : \dots : x_k]) = [\zeta_0 G_0(x) : \dots : \zeta_k G_k(x)]$; voir aussi KAWAGUCHI & SILVERMAN (2007a).

Exercice 2.4.9. — Soit G et A des groupes abéliens et soit $f : G \rightarrow A$ une application. On suppose que f vérifie la relation (2.1.10) et que la multiplication par 2 dans A est un isomorphisme.

- a) Démontrer que l'application b de $G \times G$ dans A donnée par $b(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y) + f(0)$ est bilinéaire et symétrique.
- b) Soit ℓ l'application de G dans A définie par $\ell(x) = f(x) - \frac{1}{2}b(x, x) + f(0)$. Démontrer que ℓ est une application linéaire.
- c) En déduire que f est la somme d'une forme quadratique, d'une forme linéaire et d'une constante (à valeurs dans A).

CHAPITRE 3

ÉQUIDISTRIBUTION SUR LA DROITE PROJECTIVE

Le but de ce chapitre est d'exposer la démonstration de la conjecture d'équidistribution des points de petite hauteur pour les systèmes dynamiques sur la droite projective. Cette conjecture a été démontrée par AUTISSIER (2001) par des techniques de géométrie d'Arakelov, mais le cas de la droite projective munie de la hauteur naturelle (un système dynamique torique) est dû à BILU (1997). La méthode utilisée par BILU a été étendue au cas général dans BAKER & RUMELY (2006) (voir aussi BAKER & HSIA (2005) pour les systèmes dynamiques polynomiaux) et indépendamment par FAVRE & RIVERA-LETELIER (2006), ces derniers auteurs établissant en outre une borne pour la vitesse de convergence.

La version que je donne ici est issue de BAKER & RUMELY (2006) avec quelques simplifications que permettent un résultat de BAKER (2006) et l'emploi de techniques L^2 classiques en théorie du potentiel.

§3.1. Fonctions de Green

Dans toute cette section, on se donne un corps valué \mathbf{C}_v qui est ou bien le corps \mathbf{C} des nombres complexes, ou bien le corps \mathbf{C}_p , pour un nombre premier p . On note $|\cdot|$ la valeur absolue de \mathbf{C}_v . Soit f un endomorphisme de degré d de la droite projective, donné par deux polynômes homogènes (U, V) en deux variables X et Y à coefficients dans \mathbf{C}_v , sans zéro commun dans \mathbf{C}_v^2 autre que $(0, 0)$.

La n -ième itérée de f est donnée par deux polynômes homogènes (U_n, V_n) de degré d^n . En fait, ces polynômes obéissent aux relations de récurrence

$$\begin{aligned} U_{n+1}(X, Y) &= U(U_n(X, Y), V_n(X, Y)) = U_n(U(X, Y), V(X, Y)), \\ V_{n+1}(X, Y) &= V(U_n(X, Y), V_n(X, Y)) = V_n(U(X, Y), V(X, Y)). \end{aligned}$$

Ils sont de degré d^n et sans zéro commun autre que $(0, 0)$.

Soit ∞ le point $[1 : 0]$ de \mathbf{P}^1 . Le diviseur $f^*\infty$ est défini par l'équation $V = 0$. On a ainsi $f^*\infty = d\infty + \text{div}(V/Y^d)$. Notons λ_v la fonction de Green normalisée pour le diviseur ∞ et la fraction rationnelle $V(X, Y)/Y^d$.

A. Ensemble de Julia rempli

LEMME 3.1.1. — *Pour tout $(x, y) \in \mathbf{C}_v^2$, la limite suivante*

$$(3.1.2) \quad \Lambda_v(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log \max(|U_n(x, y)|, |V_n(x, y)|)$$

existe. En fait, on a

$$\Lambda_v(x, y) = \lambda_v([x : y]) + \log |y|$$

pour tout $(x, y) \in \mathbf{C}_v^2$ tel que $y \neq 0$.

Démonstration. — Lorsque $(x, y) = (0, 0)$, la suite qui définit Λ_v est constante de valeur $-\infty$. Nous allons montrer qu'elle converge en tout autre point vers un nombre réel.

Comme U et V sont sans zéro commun, on déduit du théorème des zéros de HILBERT l'existence d'un encadrement

$$(3.1.3) \quad c_v^{-1} \max(|x|, |y|)^d \leq \max(|U(x, y)|, |V(x, y)|) \leq c_v \max(|x|, |y|)^d,$$

valable pour tout couple $(x, y) \in \mathbf{C}_v \times \mathbf{C}_v$. (La méthode a été exposée plusieurs fois déjà, par exemple dans la preuve de la proposition 1.3.4.) On en déduit que

$$\frac{1}{d^n} \log \max(|U_n(x, y)|, |V_n(x, y)|) - \frac{1}{d^{n+1}} \log \max(|U_{n+1}(x, y)|, |V_{n+1}(x, y)|)$$

est majorée uniformément par un multiple de d^{-n} sur le complémentaire de $(0, 0)$ dans $\mathbf{C}_v \times \mathbf{C}_v$, d'où la convergence normale de la suite $(d^{-n} \log \max(|U_n|, |V_n|))$ sur cet ensemble. Sa limite est donc une fonction continue sur $\mathbf{C}_v^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et la fonction

$$(x, y) \mapsto \Lambda_v(x, y) - \log \max(|x|, |y|)$$

est bornée sur $\mathbf{C}_v^2 \setminus \{(0, 0)\}$. En particulier, Λ_v est bornée sur tout domaine de \mathbf{C}_v^2 de la forme

$$a \leq \max(|x|, |y|) \leq b,$$

où a et b sont des nombres réels strictement positifs.

Par construction, on a $\Lambda_v(U(x, y), V(x, y)) = d\Lambda_v(x, y)$. De plus, pour $u \in \mathbf{C}_v^*$ et $(x, y) \in \mathbf{C}_v \times \mathbf{C}_v$ distinct de $(0, 0)$, on a $\Lambda_v(ux, uy) = \log |u|_v + \Lambda_v(x, y)$. Par suite, l'application $(x, y) \mapsto \Lambda_v(x, y) - \log |y|$ définit, par passage au quotient, une application φ , continue, de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_v) \setminus \{\infty\}$ dans \mathbf{R} . L'ensemble des $[x : y] \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_v)$ tels que $|y| \leq |x|$ est un voisinage du point $\infty = [1 : 0]$; en un tel point $[x : y]$ avec $y \neq 0$,

$$\varphi([x : y]) = \Lambda_v(x, y) - \log |y| = -\log \frac{|y|}{\max(|x|, |y|)} + (\Lambda_v(x, y) - \log \max(|x|, |y|)) \quad .$$

Par suite, φ est une fonction de Green pour le diviseur ∞ .

Les relations

$$\begin{aligned}
 \varphi(f([x : y])) &= \varphi([U(x, y) : V(x, y)]) \\
 &= \Lambda_v(U(x, y), V(x, y)) - \log |V(x, y)|_v \\
 &= d\Lambda_v(x, y) - \log |V(x, y)|_v \\
 &= d\varphi([x : y]) - \log \left| \frac{V(x, y)}{y^d} \right|_v
 \end{aligned}$$

montrent qu'elle vérifie en outre l'équation fonctionnelle qui caractérise la fonction de Green normalisée. On a donc $\lambda_v = \varphi$. \square

Soit \mathcal{J}_v l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{C}_v^2$ tels que la suite $(U_n(x, y), V_n(x, y))$ soit bornée dans \mathbf{C}_v^2 . On l'appelle l'*ensemble de Julia rempli homogène* de f .

PROPOSITION 3.1.4. — *Pour qu'un point (x, y) de $\mathbf{C}_v \times \mathbf{C}_v$, appartienne à \mathcal{J}_v , il faut et il suffit qu'il vérifie $\Lambda_v(x, y) \leq 0$.*

Démonstration. — Comme $\Lambda_v(x, y) = \lim d^{-n} \max(|U_n(x, y)|_v, |V_n(x, y)|_v)$, il est clair que l'on a $\Lambda_v(x, y) \leq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{J}_v$.

Inversement, si l'on pose $m = c_v^{-1/(d-1)}$, l'inégalité (3.1.3) entraîne que pour tout $(x, y) \in \mathbf{C}_v \times \mathbf{C}_v$ et tout nombre réel $R > 0$, on a l'implication

$$m \max(|x|_v, |y|_v) \geq R \quad \Rightarrow \quad m \max(|U(x, y)|_v, |V(x, y)|_v) \geq R^d.$$

Pour un couple $(x, y) \in \mathbf{C}_v^2$ tel que $m \max(|x|_v, |y|_v) \geq R$ avec $R > 1$, on en déduit que $m \max(|U_n(x, y)|_v, |V_n(x, y)|_v) \geq R^{d^n}$, d'où l'inégalité $\Lambda_v(x, y) \geq \log R > 0$. Il en est de même s'il existe un entier n tel que $m \max(|U_n(x, y)|_v, |V_n(x, y)|_v) > 1$. Autrement dit, si $\Lambda_v(x, y) \leq 0$, alors $\max(|U_n(x, y)|_v, |V_n(x, y)|_v) \leq 1/m$ pour tout n , ce qui démontre que la suite $(U_n(x, y), V_n(x, y))$ est bornée dans \mathbf{C}_v^2 . \square

Exemple 3.1.5. — Supposons que $U = X^d$ et $V = Y^d$. Alors, $U_n = X^{d^n}$ et $V_n = Y^{d^n}$ pour tout n . On a donc $\max(|U_n(x, y)|_v, |V_n(x, y)|_v) = \max(|x|_v, |y|_v)^{d^n}$ si bien que l'ensemble de Julia rempli \mathcal{J}_v est le bidisque B_v^2 , où $B_v = \{x \in \mathbf{C}_v; |x| \leq 1\}$.

Exemple 3.1.6. — Supposons que \mathbf{C}_v soit ultramétrique et que les conditions suivantes soient satisfaites :

- les coefficients de U et V sont de valeur absolue au plus 1.
- leur résultant $\text{Res}(U, V)$ est une unité v -adique.

(On dit que le système dynamique a *bonne réduction*.) Alors, l'ensemble de Julia rempli homogène \mathcal{J}_v est exactement l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{C}_v^2$ tels que $\max(|x|_v, |y|_v) \leq 1$.

En effet, dans l'inégalité (3.1.3), on peut prendre la constante c_v égale à 1. C'est clair pour l'inégalité de droite : si $\max(|x|_v, |y|_v) \leq 1$, alors $\max(|U(x, y)|_v, |V(x, y)|_v) \leq 1$. En particulier, si un couple $(x, y) \in \mathbf{C}_v^2$ vérifie $|x|_v \leq 1$ et $|y|_v \leq 1$, il en est de même des couples $(U_n(x, y), V_n(x, y))$ et $(x, y) \in \mathcal{J}_v$.

Avant de démontrer l'inégalité de gauche, rappelons que par définition, le résultant $\text{Res}(U, V)$ est le déterminant de l'application linéaire $(A, B) \mapsto AU + BV$ de l'espace $(\mathbf{C}_v[X, Y]_{d-1})^2$ dans $\mathbf{C}_v[X, Y]_{2d-1}$, dans les bases standard données par les monômes; considéré comme fonction polynomiale des coefficients de U et V , il est bi-homogène de bidegré $(d(d-1), d(d-1))$ et s'annule si et seulement si U et V ont un zéro commun. La théorie du résultant affirme qu'il existe des polynômes homogènes A et B de degrés $d-1$ tels que $AU + BV = \text{Res}(U, V)X^{2d-1}$, et les coefficients de ces polynômes appartiennent au sous-anneau de \mathbf{C}_v engendré par les coefficients de U et V ; ce sont donc des éléments de valeur absolue au plus 1. Par suite, sous l'hypothèse que $|\text{Res}(U, V)| = 1$, on a

$$|x|^{2d-1} \leq \max(|x|, |y|)^{d-1} \max(|U(x, y)|, |V(x, y)|),$$

et donc

$$|x| \leq \max(|U(x, y)|, |V(x, y)|)^{1/d}.$$

Par symétrie, $|y|$ vérifie la même majoration. Par récurrence, on obtient l'inégalité

$$\max(|x|, |y|) \leq \max(|U_n(x, y)|, |V_n(x, y)|)^{1/d^n},$$

valable pour tout $n \geq 1$. En particulier, si la suite $(U_n(x, y), V_n(x, y))$ est bornée, $\max(|x|, |y|) \leq 1$, ce qui conclut la preuve que \mathcal{J}_v est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{C}_v^2$ tels que $\max(|x|, |y|) \leq 1$.

B. L'inégalité de BAKER

Pour tout couple de points distincts, $(P_1, P_2) \in (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{C}_v)$, de coordonnées homogènes $[x_1 : y_1]$ et $[x_2 : y_2]$ respectivement, posons

$$(3.1.7) \quad G_v(P_1, P_2) = -\log \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right|_v + \Lambda_v(x_1, y_1) + \Lambda_v(x_2, y_2) - \frac{1}{d(d-1)} \log |\text{Res}(U, V)|_v.$$

On vérifie immédiatement que cette expression ne dépend pas du choix des coordonnées homogènes définissant les points P_1 et P_2 . Elle ne dépend pas non plus du choix des polynômes homogènes U et V grâce à l'homogénéité du résultant.

Si les coordonnées homogènes de P_1 et P_2 sont choisies de la forme $[z_1 : 1]$ et $[z_2 : 1]$, on a

$$(3.1.8) \quad G_v(P_1, P_2) = -\log |z_1 - z_2|_v + g_v(P_1) + g_v(P_2) - \frac{1}{d(d-1)} \log |\text{Res}(U, V)|_v.$$

On voit ainsi que G_v est une fonction de Green pour le diviseur diagonal de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ — il ne faut cependant pas la confondre avec les fonctions de Green de diviseurs sur \mathbf{P}^1 ! La fonction G_v jouera ici le rôle (de l'opposé du logarithme) d'une distance entre points de \mathbf{P}^1 .

La proposition essentielle sur laquelle reposera la démonstration du théorème d'équidistribution est la minoration suivante de moyennes de la fonction G_v . C'est un analogue d'un théorème d'ELKIES (voir LANG (1988), théorème 5.1, p. 150) dans le cas des fonctions de Green normalisées; l'assertion sur la limite inférieure est le pendant d'une minoration de FALTINGS (1984).

PROPOSITION 3.1.9 (BAKER (2006)). — *Il existe un nombre réel c_v tel que pour tout entier n et toute famille (P_1, \dots, P_n) de points distincts de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_v)$, on ait*

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G_v(P_i, P_j) \geq -c_v \frac{\log n}{n}.$$

En particulier,

$$\liminf_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (P_1, \dots, P_n) \text{ distincts}}} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G_v(P_i, P_j) \geq 0.$$

La démonstration de cette proposition fera l'objet du §3.3.

C. Diamètre transfini homogène

Nous terminons cette section par une première application de l'inégalité de la prop. 3.1.9, à savoir le calcul du diamètre transfini homogène de l'ensemble de Julia rempli homogène. Il s'agit d'un analogue du fait, classique en dynamique polynomiale sur \mathbf{C} , que le diamètre transfini, ou la capacité, de l'ensemble Julia d'un polynôme $f = a_d x^d + \dots + a_0 \in \mathbf{C}[x]$, de degré $d \geq 2$, est égale à $|a_d|^{-1/(d-1)}$. (Voir RANSFORD (1995), théorème 6.5.1, p. 191). Cette formule est due à DEMARCO (2003) dans le cas archimédien et à BAKER & RUMELY (2006) dans le cas général; on trouvera dans DEMARCO & RUMELY (2007) la généralisation au cas de n polynômes homogènes de même degré en n variables.

Pour $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z_2 = (x_2, y_2)$ dans \mathbf{C}_v^2 , on pose

$$d(z_1, z_2) = |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

Le *diamètre transfini homogène* d'une partie bornée K de \mathbf{C}_v^2 est défini par la formule

$$\delta^h(K) = \lim_n \sup_{z_1, \dots, z_n \in K} \prod_{i \neq j} d(z_i, z_j)^{1/n(n-1)}.$$

Par la même méthode que dans le cas classique, on vérifie facilement que la limite existe : notant $\delta_n(K)$ le n -ième terme de cette suite, la suite $(\delta_n(K))$ est décroissante. Soit en effet $z_1, \dots, z_n, z_{n+1} \in K$. Pour tout $s \in \{1, \dots, n+1\}$, on a

$$\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq n+1 \\ i, j \neq s}} d(z_i, z_j) \leq \delta_n(K)^{n(n-1)}.$$

Faisant le produit de ces inégalités, on obtient

$$\prod_{1 \leq i \neq j \leq n+1} d(z_i, z_j)^{n-1} \leq \delta_n(K)^{n(n-1)(n+1)},$$

soit encore

$$\prod_{1 \leq i \neq j \leq n+1} d(z_i, z_j)^{1/n(n+1)} \leq \delta_n(K).$$

Par suite, $\delta_{n+1}(K) \leq \delta_n(K)$.

On s'intéresse dans cette section au diamètre transfini homogène des ensembles de Julia remplis.

Exemple 3.1.10. — Supposons que \mathbf{C}_v soit ultramétrique et montrons que le diamètre transfini homogène du bidisque $K = B_v^2$, où $B_v = \{x \in \mathbf{C}_v; |x| \leq 1\}$, est égal à 1.

Par l'inégalité ultramétrique, $d(z, w) \leq 1$ pour z et w dans K . On voit donc que $\delta^h(K) \leq 1$. Par ailleurs, si P_1, \dots, P_n sont n éléments de $\mathbf{C}_v \times \mathbf{C}_v$ de la forme $(z_i, 1)$, où z_1, \dots, z_n sont des éléments distincts de \mathbf{C}_v , de valeur absolue ≤ 1 et dont les images dans le corps résiduel soient distinctes, on a $d(P_i, P_j) = 1$ pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$. Puisque le corps résiduel de \mathbf{C}_v est infini, il existe de telles familles. Avec les notations introduites au début de ce paragraphe, on a donc $\delta_n(K) = 1$, d'où $\delta^h(K) = 1$.

L'exemple qui précède calcule donc le diamètre transfini homogène d'un système dynamique à bonne réduction ; la formule suivante concerne le cas d'un système dynamique général.

PROPOSITION 3.1.11. — On a $\delta^h(\mathcal{J}_v) = |\text{Res}(U, V)|^{-1/d(d-1)}$.

Démonstration. — Nous faisons la démonstration sous l'hypothèse supplémentaire que les coefficients de f appartiennent à un corps de nombres, en renvoyant à l'exercice 3.5.6 pour le cas général et à BAKER (2009), cor. A.16, pour une démonstration purement locale.

Rappelons que la fonction de Green G_v sur $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est définie par la formule

$$G_v([x_1 : y_1], [x_2 : y_2]) = -\log d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + \Lambda_v(x_1, y_1) + \Lambda_v(x_2, y_2) - \frac{1}{d(d-1)} \log |\text{Res}(U, V)|.$$

Par suite, si les points $P_i = (x_i, y_i)$ appartiennent à \mathcal{J}_v , on a

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} G_v(P_i, P_j) \leq -\log \left(\prod_{i \neq j} d(P_i, P_j) \right)^{1/n(n-1)} - \frac{1}{d(d-1)} \log |\text{Res}(U, V)|.$$

Faisons tendre n vers l'infini et appliquons la prop. 3.1.9 ; on trouve donc

$$\log \delta^h(\mathcal{J}_v) \leq -\frac{1}{d(d-1)} \log |\text{Res}(U, V)|_v.$$

Pour établir l'inégalité dans l'autre sens, on écrit les inégalités analogues pour toutes les places w du corps de nombres F engendré par les coefficients de f . Pour $w \in M_F$, notons d_w la fonction analogue à d mais avec la valeur absolue $|\cdot|_w$ de \mathbf{C}_w . Pour tout couple (P_1, P_2) d'éléments de $\mathbf{C}_v \times \mathbf{C}_v$, on a, notant $P_i = (x_i, y_i)$, l'égalité $d_w(P_1, P_2) = |x_1 y_2 - x_2 y_1|_w$. Si P_1 et P_2 sont des éléments distincts de $F \times F$, la formule du produit entraîne donc

$$\sum_{w \in M_F} \varepsilon_w \log d_w(P_1, P_2) = 0.$$

Par conséquent, pour tout n -uplet (P_1, \dots, P_n) d'éléments de F , on a

$$\begin{aligned} \sum_{w \in M_F} \varepsilon_w \log \delta_n^h(\mathcal{J}_w) &\geq \sum_{w \in M_F} \varepsilon_w \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \log d_w(P_i, P_j) \\ &\geq \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{w \in M_F} \varepsilon_w \log d_w(P_i, P_j) \geq 0. \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_w \varepsilon_w \log \delta^h(\mathcal{J}_w) \leq -\frac{1}{d(d-1)} \sum_w \varepsilon_w \log |\text{Res}(U, V)|_w = 0,$$

toujours par la formule du produit, on a égalité place par place, comme il fallait démontrer. \square

§3.2. Démonstration du théorème d'équidistribution

Il s'agit de démontrer le théorème suivant, cas particulier du théorème 2.3.1 lorsque $X = \mathbf{P}^1$.

THÉORÈME 3.2.1. — *Soit $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ un endomorphisme de degré $d \geq 2$ défini sur un corps de nombres F . Soit \hat{h} la hauteur normalisée relativement au fibré en droites $\mathcal{O}(1)$ sur \mathbf{P}^1 . Si $P \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$, notons δ_P la mesure de probabilité sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, moyenne des masses de Dirac aux conjugués de P sous l'action du groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$.*

Pour toute suite (P_n) de points distincts de $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ telle que $\hat{h}(P_n) \rightarrow 0$, la suite de mesures δ_{P_n} sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ converge faiblement vers la mesure canonique $\hat{\mu}_f$.

Remarque 3.2.2. — Considérons deux endomorphismes de degré ≥ 2 de \mathbf{P}^1 , disons f et g , à coefficients dans un corps de nombres. Supposons qu'ils aient une infinité de points prépériodiques en commun. Puisque les points prépériodiques sont ceux de hauteur normalisée nulle, cette hypothèse est satisfaite lorsque les hauteurs normalisées \hat{h}_f et \hat{h}_g coïncident, comme dans KAWAGUCHI & SILVERMAN (2007a). On peut alors construire une suite (P_n) de points distincts de $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ vérifiant $\hat{h}_f(P_n) = \hat{h}_g(P_n) = 0$. Par suite, les mesures canoniques $\hat{\mu}_f$ et $\hat{\mu}_g$ coïncident. C'est alors un thème classique en dynamique complexe que de relier f et g . Hormis des cas exceptionnels, LEVIN & PRZYTICKI (1997) démontrent par exemple qu'il existe des entiers m et n tels que $(f^{-1} \circ f) \circ f^m = (g^{-1} \circ g) \circ g^n$. (Dans cette équation, $f^{-1} \circ f$ est à considérer comme une branche de la correspondance qui serait notée de la même façon.)

A. Hauteur et discrédance

Commençons par relier hauteur d'un point et les valeurs des fonctions de Green G_v .

Soit $P \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$; notons n son degré sur F et P_1, \dots, P_n ses conjugués. Supposons $n \geq 2$. On pose alors, pour toute place $v \in M_F$,

$$(3.2.3) \quad D_v(P) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G_v(P_i, P_j).$$

C'est la *discrédance* v -adique de P : elle mesure la proximité mutuelle des conjugués de P pour la topologie v -adique ; elle est d'autant plus grande que ces conjugués sont proches.

PROPOSITION 3.2.4. — *Pour tout point $P \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ privé de $\mathbf{P}^1(F)$, on a*

$$\hat{h}(P) = \frac{1}{2} \sum_{v \in M_F} \varepsilon_v D_v(P).$$

Démonstration. — Comme $P \notin \mathbf{P}^1(F)$, $P \neq \infty$. On peut alors fixer les coordonnées homogènes des P_i sous la forme $[z_i : 1]$, avec $z_i \in \overline{\mathbf{Q}}$. Par définition de G_v ,

$$D_v(P) = -\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \log |z_i - z_j|_v + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_v(P_i) - \frac{1}{d(d-1)} \log |\text{Res}(U, V)|_v.$$

Par théorie de Galois, ou d'après le théorème sur les fonctions symétriques élémentaires, le produit $\prod_{i \neq j} (z_i - z_j)$ appartient à F ; c'est, au signe près, le discriminant $\Delta(P)$ du polynôme $\prod_{i=1}^n (T - z_i)$. Par définition de la hauteur locale \hat{h}_v relative au diviseur ∞ et à la fraction rationnelle $V(X, Y)/Y^d$, on a donc

$$D_v(P) = 2\hat{h}_v(P) - \frac{1}{n(n-1)} \log |\Delta(P)|_v - \frac{1}{d(d-1)} \log |\text{Res}(U, V)|_v,$$

La décomposition de la hauteur normalisée en somme de hauteurs locales normalisées, pour $P \neq \infty$, s'écrit

$$\hat{h}(P) = \sum_{v \in M_F} \varepsilon_v \hat{h}_v(P).$$

D'autre part, la formule du produit implique que

$$\sum_{v \in M_F} \varepsilon_v \log |\Delta(P)|_v = \sum_{v \in M_F} \varepsilon_v \log |\text{Res}(U, V)|_v = 0.$$

La proposition en résulte. \square

COROLLAIRE 3.2.5. — Soit (P_n) une suite de points distincts de $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ telle que $\hat{h}(P_n)$ tend vers 0. Pour toute place v de F , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_v(P_n) = 0.$$

Démonstration. — Comme il n'y a qu'un nombre fini de points de hauteur bornée et de degré donné, le degré de P_n , $[F(P_n) : F]$, tend vers l'infini quand $n \rightarrow \infty$. D'après la prop. 3.1.9, $\liminf_n D_v(P_n) \geq 0$. Alors, pour toute place w de F , on a

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in M_F} (\varepsilon_v D_v(P_n)) \\ &\geq \limsup_n (\varepsilon_w D_w(P_n)) + \sum_{v \neq w} \liminf_n (\varepsilon_v D_v(P_n)) \\ &\geq \limsup_n (\varepsilon_w D_w(P_n)), \end{aligned}$$

d'où le corollaire. \square

B. Énergie

Soit w la valeur absolue archimédienne de F associée à l'inclusion de F dans \mathbf{C} . Pour simplifier les notations de ce paragraphe, nous désignons par G la fonction de Green G_w et par μ la mesure canonique $\hat{\mu}_f$. Nous notons $M = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et Δ la diagonale de $M \times M$.

Par leurs définitions mêmes, G et μ sont reliées par l'équation aux dérivées partielles

$$(3.2.6) \quad dd^c G(z, w) + \delta_\Delta = d\mu(z) + d\mu(w)$$

sur $M \times M$, où δ_Δ désigne le courant d'intégration sur la diagonale Δ . En outre, G est symétrique ($G(z, w) = G(w, z)$) et minorée.

On appelle *énergie* d'une mesure de probabilité ν sur M la quantité (éventuellement infinie)

$$(3.2.7) \quad E(\nu) = \int_{M \times M} G(P, Q) d\nu(P) d\nu(Q).$$

Le *potentiel* de ν est défini par la formule

$$(3.2.8) \quad u_\nu(P) = \int_M G(P, Q) d\nu(Q).$$

Notons W_1 l'espace de Sobolev des fonctions u sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ qui sont localement de carré sommable, ainsi que les coefficients des formes différentielles données par sa dérivée ∂u au sens des distributions. (Il en est alors de même de $\bar{\partial} u$.) Si $u \in W_1$, on note $\|u\|_{\text{Dir}}$ la semi-norme de Dirichlet de u , définie par

$$\|u\|_{\text{Dir}}^2 = \frac{i}{2\pi} \int_M \partial u \wedge \bar{\partial} u = - \int_M u dd^c u.$$

LEMME 3.2.9. — a) *Le potentiel u_ν d'une mesure de probabilité ν est une fonction semi-continue inférieurement sur M qui vérifie l'équation $dd^c u_\nu + \nu = \mu$ au sens des distributions. En outre, u_μ est constante, de valeur $E(\mu)$.*

b) *Si ν est une mesure de probabilité dont le potentiel u_ν est une forme différentielle \mathcal{C}^∞ , on a $E(\nu) = E(\mu) + \|u_\nu\|_{\text{Dir}}^2$.*

c) *Une mesure ν est d'énergie finie si et seulement si son potentiel appartient à W_1 .*

Démonstration. — a) Comme $\max(G, m)$ est continue pour tout nombre réel m , u_ν est limite croissante de fonctions continues; elle est donc semi-continue inférieurement. L'équation $dd^c u_\nu + \nu = \mu$ se démontre aisément par intégrations par parties. Appliquons cette formule à $\nu = \mu$; il s'ensuit que u_μ est harmonique, donc constante, de valeur $E(\mu) = \int u_\mu(P) d\mu(P)$.

b) Si u_ν est lisse, on a

$$\begin{aligned} E(\nu) &= \int_M u_\nu(P) d\nu(P) \\ &= \int_M u_\nu(P) (d\mu(P) - dd^c u_\nu(P)) \\ &= \|u_\nu\|_{\text{Dir}}^2 + \int_M u_\nu(P) d\mu(P) \\ &= \|u_\nu\|_{\text{Dir}}^2 + \int_{M \times M} G(P, Q) d\mu(P) d\nu(Q) \\ &= \|u_\nu\|_{\text{Dir}}^2 + \int_M u_\mu(Q) d\nu(P) \\ &= \|u_\nu\|_{\text{Dir}}^2 + E(\mu). \end{aligned}$$

c) Si $u_\nu \in W_1$, on déduit facilement de l'égalité précédente que $E(\nu) < \infty$. Inversement, on peut approcher ν par une suite ν_ε de mesures de probabilité lisses d'énergies

bornées.⁽¹⁾ Leur potentiel u_ε appartient alors à W_1 (hors de P , $u_\varepsilon(\cdot) - G(P, \cdot)$ est de dd^c lisse et $G(P, \cdot)$ appartient à W_1). Les normes $\|u_\varepsilon\|_{\text{Dir}}$ sont bornées lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, puisque les énergies des mesures ν_ε sont uniformément bornées. Il existe donc une sous-suite faiblement convergente dans W_1 modulo les constantes ; soit $u \in W_1$ sa limite. Alors, $dd^c u = dd^c u_\nu$, si bien que $u - u_\nu$ est une distribution harmonique, donc est constante. On a donc $u \in W_1$. \square

THÉORÈME 3.2.10. — *On a $E(\nu) \geq E(\mu) \geq 0$ pour toute mesure de probabilité ν . De plus, $E(\nu) = E(\mu)$ équivaut à $\nu = \mu$.*

Démonstration. — Soit c le nombre réel dont l'existence est affirmée par la prop. 3.1.9. Ainsi, si P_1, \dots, P_n sont des points distincts de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, on a

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} G(P_i, P_j) \geq -c \frac{\log n}{n}.$$

Comme $G(P, Q)$ vaut $+\infty$ si $P = Q$, cette relation vaut même si les P_i ne sont pas distincts. On peut alors intégrer cette relation par rapport à la mesure-produit $\otimes d\nu(P_i)$. Par symétrie, on obtient

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})} G(P, Q) d\nu(P) d\nu(Q) \geq -c \frac{\log n}{n},$$

soit encore

$$E(\nu) = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})} G(P, Q) d\nu(P) d\nu(Q) \geq -c \frac{\log n}{n}.$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, on obtient $E(\nu) \geq 0$.

Supposons alors $E(\nu) \leq E(\mu)$. En particulier, ν est d'énergie finie. Il existe donc $u \in W_1$ tel que $dd^c u + \nu = \mu$ et $E(\nu) = E(\mu) + \|u\|_{\text{Dir}}^2$. Par conséquent, $E(\nu) \geq E(\mu)$, d'où l'égalité. Alors, $\|u\|_{\text{Dir}}^2 = 0$ si bien que u est constante. Donc $\mu = \nu$. \square

C. Fin de la démonstration

L'ensemble des mesures de probabilité sur la sphère de Riemann $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est faiblement compact. Pour montrer que la suite de mesures de probabilités (δ_{P_n}) converge vers $\hat{\mu}_f$, il suffit de montrer que $\hat{\mu}_f$ est sa seule valeur d'adhérence. Quitte à extraire une sous-suite convergente de la suite (δ_{P_n}) , il est ainsi loisible de supposer que (δ_{P_n}) converge vers une mesure de probabilité ν . On doit montrer que $\nu = \hat{\mu}_f$.

⁽¹⁾À l'aide d'une partition de l'unité, on se ramène au cas de mesures supportées par le disque unité et où $G(z, w) = \log|z - w|^{-1}$. Soit μ_ε des mesures de probabilités de la forme $\rho_\varepsilon(r) r dr d\theta$, et où les fonctions ρ_ε sont positives, à support dans $[0, 1]$ et où $\rho_\varepsilon(r)$ tend uniformément vers 0 sur tout intervalle fermé de la forme $[a, 1]$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Posons $\nu_\varepsilon = \nu * \mu_\varepsilon$; les mesures ν_ε sont à densité \mathcal{C}^∞ et convergent vers ν quand $\varepsilon \rightarrow 0$. L'inégalité

$$\int \log|z - w|^{-1} d\mu_\varepsilon(w) \leq \log|w|^{-1}$$

montre que l'énergie de ν_ε est au plus égale à celle de ν .

LEMME 3.2.11. — *On a*

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})} G_w(P, Q) \, d\nu(P) \, d\nu(Q) \leq 0.$$

Démonstration. — Notons Δ la diagonale de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Par définition,

$$D_w(P_n) = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \Delta} G_w(z, z') \, d\delta_{P_n}(z) \, d\delta_{P_n}(z').$$

La fonction G_w est continue hors de la diagonale et minorée partout. Si $M \in \mathbf{R}$, posons $G_w^M = \max(M, G_w)$. Alors,

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})} G_w^M(z, z') \delta_{P_n}(z) \delta_{P_n}(z') \leq D_w(P_n) + \frac{1}{n} M.$$

Faisons tendre n vers l'infini ; on obtient donc

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})} G_w^M(z, z') \, d\nu(z) \, d\nu(z') \leq 0.$$

Faisons tendre maintenant M vers ∞ . Le lemme de convergence monotone implique alors

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})} G_w(z, z') \, d\nu(z) \, d\nu(z') = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})} G_w^M(z, z') \, d\nu(z) \, d\nu(z') \leq 0.$$

□

Autrement dit, la mesure ν est d'énergie négative ou nulle. Comme $E(\nu) \geq E(\mu) \geq 0$, on a $\nu = \mu$.

§3.3. Preuve de l'inégalité de Baker

Nous démontrons dans ce paragraphe la proposition 3.1.9.

LEMME 3.3.1. — *Pour tout entier n , posons*

$$D_n = \inf_{(P_1, \dots, P_n) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_v)^n} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} G_v(P_i, P_j).$$

La suite (D_n) est croissante.

Démonstration. — En effet, si P_0, \dots, P_n sont des points de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_v)$,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i, j=0 \\ i \neq j}}^n G_v(P_i, P_j) &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \neq k}} G_v(P_i, P_j) \right) \\ &\geq \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^n n(n-1) D_n = n(n+1) D_n, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité $D_{n+1} \geq D_n$.

□

Il va ainsi suffir de minorer D_N pour certains entiers N ; on peut par exemple supposer que $N = d^{k+1}$, avec $k \in \mathbf{N}$. Pour la démonstration, il sera cependant plus aisé de supposer $N = td^k$ avec $k \geq 0$ et $2 \leq t \leq 2d - 1$.

Posons $m = N - 1$. L'espace vectoriel \mathcal{P}_m des polynômes homogènes de degré m est de dimension N . Nous allons en considérer deux bases.

La première de ces bases, \mathcal{B}_N est la famille des monômes $X^a Y^b$, où $a + b = m$.

Rappelons que l'on a défini des polynômes $U_n(X, Y)$ et $V_n(X, Y)$ pour tout entier $n \geq 0$ en posant $U_0 = X$, $V_0 = Y$, puis en définissant par récurrence, $U_{n+1} = U(U_n(X, Y), V_n(X, Y))$ et $V_{n+1} = V(U_n(X, Y), V_n(X, Y))$ si $n \geq 0$. On a vu que ces polynômes « relèvent » à \mathbf{C}_v^2 la dynamique de l'endomorphisme f de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_v)$; pour tout n , U_n et V_n sont premiers entre eux, non nuls. Notons alors \mathcal{C}_N la famille des polynômes de la forme

$$U_0^{a_0} V_0^{b_0} U_1^{a_1} V_1^{b_1} \dots U_k^{a_k} V_k^{b_k},$$

où $a_i + b_i = d - 1$ pour $0 \leq i < k$ et $a_k + b_k = t - 1$. Cette famille est de cardinal N et contenue dans l'espace \mathcal{P}_m . Soit A_N sa matrice dans la base \mathcal{B}_N .

LEMME 3.3.2. — *Posons $r = N(N - (t + k(d - 1)) / 2d(d - 1))$. Le déterminant de A_N vérifie $\det(A_N) = \pm \text{Res}(U, V)^r$.*

Démonstration. — Montrons d'abord que \mathcal{C}_N est une base de \mathcal{P}_m . On peut pour cela raisonner par l'absurde et supposer que N est le plus petit entier tel que \mathcal{C}_N soit liée. Considérons une relation de dépendance linéaire non triviale

$$\sum c_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} U_0^{a_0} V_0^{b_0} \dots U_k^{a_k} V_k^{b_k} = 0,$$

qu'on peut récrire $\alpha U_k^{t-1} + \beta V_k = 0$, avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{b_k=0} c_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} U_0^{a_0} V_0^{b_0} \dots U_{k-1}^{a_{k-1}} V_{k-1}^{b_{k-1}} \\ \beta &= \sum_{b_k \geq 1} c_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} U_0^{a_0} V_0^{b_0} \dots U_{k-1}^{a_{k-1}} V_{k-1}^{b_{k-1}} U_k^{a_k} V_k^{b_k-1}. \end{aligned}$$

Si $\alpha = 0$, on divise tout par V_k et on remplace t par $t - 1$, sauf si $t = 2$ auquel cas on remplace k par $k - 1$. Par minimalité de N , $\alpha \neq 0$. Comme $U_k \neq 0$, on a alors $\beta \neq 0$. Notons que

$$\deg(\alpha) = m - d^k(t - 1) = td^k - 1 - d^k(t - 1) = d^k - 1.$$

Comme U_k et V_k sont sans facteur commun, V_k divise α , ce qui contredit l'inégalité $\deg(\alpha) = d^k - 1 < \deg(V_k) = d^k$.

Inversement, si U et V avaient eu un facteur commun, la famille \mathcal{C}_N ne serait manifestement pas libre.

Oublions alors un instant les valeurs spécifiques des polynômes U et V : le déterminant de A_N est un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de U et de V . Il s'annule si et seulement si ces polynômes ont un facteur commun, c'est-à-dire si et seulement si le résultant de U et V s'annule. Le théorème des zéros de Hilbert entraîne alors que le déterminant de A_n et le résultant $\text{Res}(U, V)$ ont exactement les mêmes facteurs irréductibles dans l'anneau (factoriel) des polynômes. Or, $\text{Res}(U, V)$ est lui-même

un polynôme *irréductible* en les coefficients de U et V . Il existe donc des entiers c et s tels que

$$\det(A_N) = c \operatorname{Res}(U, V)^s.$$

Considérons le degré de A_N en les coefficients de U : il vaut

$$\begin{aligned} \deg_U(\det(A_N)) &= (d-1) \deg(U_1) + \cdots + (d-1) \deg(U_{k-1}) + (t-1) \deg(U_k) \\ &= (d-1) + (d^2-1) + \cdots + (d^{k-1}-1) + (t-1) \frac{d^k-1}{d-1} \\ &= t \frac{d^k-1}{d-1} - k, \end{aligned}$$

car le degré de U_k en les coefficients de U est égal à $(d^k-1)/(d-1)$, comme on le vérifie par récurrence. Le degré du résultant $\operatorname{Res}(U, V)$ en les coefficients de U est égal à $2d$. On a donc $s = (t(d^k-1) - k(d-1))/2d(d-1) = r$.

Pour calculer l'entier c , il suffit de le déterminer pour un choix particulier de U et V , par exemple $U = X^d$ et $V = Y^d$. La famille \mathcal{C}_N coïncide alors avec la famille \mathcal{B}_N , à l'ordre près. On a donc $c = \pm 1$, ce qui achève la démonstration du lemme. \square

Notons $B^{(i)}$ les éléments de \mathcal{B}_N , pour $1 \leq i \leq N$, et $C^{(i)}$ ceux de \mathcal{C}_N . Pour $1 \leq j \leq N$, soit $[x_j : y_j]$ un système de coordonnées homogènes du point P_j . On commence par calculer le déterminant β de la matrice B dont le terme de ligne i et de colonne j est $B^{(i)}(x_j, y_j)$. Il vaut

$$\begin{aligned} \beta &= x_1^{N-1} \cdots x_N^{N-1} \det((y_j/x_j)^i) \\ &= x_1^{N-1} \cdots x_N^{N-1} \prod_{i>j} \left(\frac{y_i}{x_i} - \frac{y_j}{x_j} \right) \\ &= x_1^{N-1} \cdots x_N^{N-1} \left(\prod_{i>j} x_i x_j \right)^{-1} \prod_{i>j} (y_i x_j - x_i y_j). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\beta^2 = \pm \prod_{i \neq j} (y_i x_j - x_i y_j).$$

Évaluons aussi le déterminant γ de la matrice C dont le terme (i, j) est $C^{(i)}(x_j, y_j)$. Soit M un nombre réel tel que l'ensemble de Julia rempli homogène \mathcal{J}_v soit contenu dans l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{C}_v^2$ tels que $|x|_v \leq M$ et $|y|_v \leq M$. Si $(x, y) \in \mathcal{J}_v$, $(U_k(x, y), V_k(x, y))$ appartient à \mathcal{J}_v pour tout k , d'où $|U_k(x, y)|_v \leq M$ et $|V_k(x, y)|_v \leq M$. Si de plus v est une place ultramétrique, on a alors, avec $C^{(i)}$ défini par la famille (\mathbf{a}, \mathbf{b}) ,

$$\left| C^{(i)}(x, y) \right|_v = \prod_{i=0}^k |U_i(x, y)|_v^{a_i} |V_i(x, y)|_v^{b_i} \leq M^{a_0+b_0} \cdots M^{a_k+b_k} = M^s,$$

avec $s = k(d-1) + (t-1)$. Cela entraîne $|\gamma|_v \leq M^{sN}$. Dans le cas où v est une place archimédienne, l'inégalité d'Hadamard implique seulement $|\gamma|_v \leq N^{N/2} M^{sN}$. Posons $\theta_v = 1$ si v est archimédienne et $\theta_v = 0$ sinon.

Enfin, la définition de la matrice A_N implique que l'on a $\alpha\beta = \gamma$, où $\alpha = \det(A_N)$. Par conséquent,

$$\prod_{i \neq j} |y_i x_j - x_i y_j|_v = |\gamma|_v^2 |\alpha|_v^{-2} = |\gamma|_v^2 |\text{Res}(U, V)|_v^{-2r}.$$

Passons au logarithme, on obtient

$$\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \log |y_i x_j - x_i y_j|_v \leq \theta_v \frac{N \log N}{N(N-1)} + \frac{2s}{N-1} \log(M) - \frac{2r}{N(N-1)} \log |\text{Res}(U, V)|_v$$

soit encore, compte tenu de la définition (3.1.7) de la fonction G_v ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} G_v(P_i, P_j) &\geq -\theta_v \frac{\log N}{N-1} - \frac{2s}{N-1} \log M \\ &\quad + \left(\frac{2r}{N(N-1)} - \frac{1}{d(d-1)} \right) \log |\text{Res}(U, V)|_v + 2 \min_i \Lambda_v(x_i, y_i). \end{aligned}$$

Si $2 \leq t \leq 2d-1$ (il suffit que t soit borné), il en résulte alors l'inégalité

$$\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} G_v(P_i, P_j) \geq -c \frac{\log N}{N} + 2 \min_i \Lambda_v(x_i, y_i).$$

Rappelons que les coordonnées homogènes $[x_i : y_i]$ ont été choisies de sorte que (x_i, y_i) appartienne à l'ensemble de Julia rempli homogène \mathcal{J}_v . On a alors $\Lambda_v(x_i, y_i) \leq 0$, mais on peut utiliser l'homogénéité de Λ_v et la densité dans \mathbf{R} de l'ensemble des valeurs absolues des éléments de \mathbf{C}_v^* pour choisir chaque couple (x_i, y_i) de sorte que $\Lambda_v(x_i, y_i)$ soit arbitrairement proche de 0.

Cela termine la démonstration de la prop. 3.1.9

§3.4. Le théorème d'équidistribution de Bilu

Lorsque $f: \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ est l'endomorphisme donné par $[x : y] \mapsto [x^d : y^d]$, la hauteur canonique est la hauteur usuelle et la mesure canonique est la mesure de Haar normalisée du sous-groupe compact \mathbf{S}_1 de $\mathbf{C}^* \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Le théorème d'équidistribution qu'on obtient dans ce cas est dû à BILU (1997), mais une variante légèrement plus faible remonte à ERDÖS & TURÁN (1950). C'est la proposition :

PROPOSITION 3.4.1. — *Soit (x_n) une suite de nombres algébriques deux à deux distincts telle que $h(x_n)$ tend vers 0. La suite de mesures (δ_{x_n}) sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ converge vers la mesure de Lebesgue portée par le cercle unité \mathbf{S}_1 .*

Dans ce paragraphe, je voudrais expliquer comment BILU (1997) déduit de cette proposition une démonstration de la conjecture d'équidistribution 2.2.14 lorsque X est un système dynamique torique.

Pour simplifier l'exposition, on considère $(\overline{\mathbf{Q}}^*)^k = \mathbf{G}_m^k(\overline{\mathbf{Q}})$ comme ouvert dense de l'espace projectif $(\mathbf{P}^1)^k$; la hauteur d'un point (x_1, \dots, x_k) de $(\mathbf{P}^1)^k(\overline{\mathbf{Q}})$ est alors la somme des hauteurs usuelles des x_i .

On appelle sous-variété de torsion de \mathbf{G}_m^k un translaté gH d'un sous-tore H de \mathbf{G}_m^k par un point d'ordre fini $g \in \mathbf{G}_m^k(\overline{\mathbf{Q}})$. La mesure canonique $\hat{\mu}_k$ sur $\mathbf{G}_m^k(\mathbf{C}) = (\mathbf{C}^*)^k$, aussi notée $\hat{\mu}$, est la mesure de Haar portée par le sous-groupe compact maximal $(\mathbf{S}_1)^k$ de $(\mathbf{C}^*)^k$; autrement dit, pour toute fonction φ à support compact sur $(\mathbf{C}^*)^k$,

$$\hat{\mu}(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_k}) d\theta_1 \cdots d\theta_k.$$

THÉORÈME 3.4.2 (BILU (1997)). — Soit (x_n) une suite de points de $(\overline{\mathbf{Q}}^*)^k$ qui vérifie les deux assertions :

- a) la suite $(h(x_n))$ tend vers 0 ;
- b) toute sous-variété de torsion $Z \subsetneq \mathbf{G}_m^k$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite (x_n) .

Alors, la suite de mesures de probabilités (δ_{x_n}) sur $\mathbf{G}_m^k(\mathbf{C}) = (\mathbf{C}^*)^k$ converge vers la mesure $\hat{\mu}$.

Il s'agit de la convergence des mesures de probabilités sur un espace localement compact, aussi appelée *convergence étroite*. C'est un peu plus fort que la convergence vague car cela garantit que la masse ne part pas, même partiellement, à l'infini. Bien sûr, cela coïncide ici avec la convergence des mesures de probabilités sur la compactification $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^k$.

LEMME 3.4.3. — Soit (x_n) une suite de points de $\mathbf{G}_m^k(\overline{\mathbf{Q}})$ telle que $h(x_n)$ tend vers 0. Alors, pour tout voisinage V du polycercle unité $(\mathbf{S}_1)^k$ de $\mathbf{G}_m^k(\mathbf{C})$, la suite $(\delta_{x_n}(V))$ tend vers 1.

Par conséquent, la suite de mesures de probabilité (δ_{x_n}) sur $\mathbf{G}_m^k(\mathbf{C})$ est tendue, c'est-à-dire relativement compacte pour la topologie étroite. De plus, toute mesure de probabilité adhérente à la suite (δ_{x_n}) est supportée par le polycercle unité.

Démonstration. — Soit r un nombre réel tel que $r > 1$ et tel que V contienne l'ensemble K des points (z_1, \dots, z_k) tels que $r^{-1} \leq |z_i| \leq r$ pour $1 \leq i \leq k$. Pour $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$, on a

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= \frac{1}{[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]} \sum_{p \leq \infty} \sum_{\sigma: \mathbf{Q}(\alpha) \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \max(1, |\sigma(\alpha)|_p) \\ &\geq \frac{1}{[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]} \sum_{\sigma: \mathbf{Q}(\alpha) \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \max(1, |\sigma(\alpha)|) = \int \log \max(1, |z|) \delta_\alpha(z). \end{aligned}$$

Comme $h(\alpha) = h(\alpha^{-1})$ si $\alpha \neq 0$, on a aussi

$$h(\alpha) \geq \int \log \max(1, |z|) \delta_{\alpha^{-1}}(z) = \int \log \max(1, |z|^{-1}) \delta_\alpha(z),$$

si bien que pour $\alpha \neq 0$,

$$h(\alpha) \geq \frac{1}{2} \int \log \max(|z|, |z|^{-1}) \delta_\alpha(z).$$

Si $z \in \mathbf{G}_m(\mathbf{C})$ est tel que $|z| > r$ ou $|z| < 1/r$, on a l'inégalité $\log \max(|z|, |z|^{-1}) \geq \log r$. La mesure pour δ_α du complémentaire de la couronne $r^{-1} \leq |z| \leq r$ dans \mathbf{C} est donc majorée par

$$\int \frac{\log \max(|z|, |z|^{-1})}{\log r} \delta_\alpha(z) \leq \frac{2}{\log r} h(\alpha).$$

Par conséquent, additionnant ces inégalités, la mesure du complémentaire de K dans $\mathbf{G}_m^k(\mathbf{C})$ est majorée par

$$\delta_{x_n}(\mathbb{C}K) \leq \frac{1}{\log r} \int \left(\sum_{i=1}^r \log \max(|z_i|, |z_i|^{-1}) \right) \delta_{x_n}(z_1, \dots, z_n) \leq \frac{2}{\log r} h(x_n).$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, la suite $(\delta_{x_n}(\mathbb{C}K))$ tend donc vers 0 ; la suite $(\delta_{x_n}(V))$ tend vers 1. \square

Pour conclure la démonstration du théorème 3.4.2, il suffit donc de démontrer que si une sous-suite de la suite (δ_{x_n}) converge vers une mesure de probabilité ν , alors $\nu = \hat{\mu}$. Quitte à remplacer la suite (x_n) par une sous-suite, on peut supposer, et on le fait, que la suite (δ_{x_n}) converge vers une mesure de probabilité ν . Les deux hypothèses concernant la suite (x_n) sont encore satisfaites.

LEMME 3.4.4. — *Pour qu'une mesure de probabilité ν supportée par $(\mathbf{S}_1)^k$ soit égale à la mesure $\hat{\mu}$, il faut et il suffit que pour tout k -uplet $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbf{Z}^k$ distinct de $(0, \dots, 0)$, notant $\psi: \mathbf{G}_m^k(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{G}_m(\mathbf{C})$ l'application donnée par $(z_1, \dots, z_k) \mapsto z_1^{a_1} \cdots z_k^{a_k}$, la mesure $\psi_*(\nu)$ soit égale à la mesure de Haar normalisée sur \mathbf{S}_1 .*

Démonstration. — La nécessité de la condition est évidente : comme ψ induit par restriction un homomorphisme surjectif de $(\mathbf{S}_1)^k$ dans \mathbf{S}_1 , $\psi_*(\hat{\mu})$ est la mesure de Haar normalisée sur \mathbf{S}_1 . Démontrons qu'elle est suffisante. Il s'agit pour cela de prouver que pour toute fonction continue φ sur $(\mathbf{S}_1)^k$, $\int_{(\mathbf{S}_1)^k} \varphi d\nu = \int_{(\mathbf{S}_1)^k} \varphi d\hat{\mu}$. Une fonction continue sur $(\mathbf{S}_1)^k$ peut être approchée uniformément par un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire une somme finie

$$P = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbf{Z}^k} c_{\mathbf{a}} z_1^{a_1} \cdots z_k^{a_k}.$$

Il suffit donc de prouver l'égalité lorsque φ est un tel polynôme, puis, par linéarité, lorsque φ est un monôme $z_1^{a_1} \cdots z_k^{a_k}$. Si $(a_1, \dots, a_k) = 0$, $\varphi = 1$ et l'égalité vaut car ν et $\hat{\mu}$ sont des mesures de probabilité. Lorsque $(a_1, \dots, a_k) \neq 0$, elle vaut encore par hypothèse. En effet,

$$\int_{(\mathbf{S}_1)^k} z_1^{a_1} \cdots z_k^{a_k} d\nu(z_1, \dots, z_k) = \int_{(\mathbf{S}_1)^k} \psi(z_1, \dots, z_k) d\nu(z_1, \dots, z_k) = \int_{\mathbf{S}_1} z d(\psi_*(\nu))(z).$$

Puisque $\psi_*(\nu)$ est la mesure de Haar normalisée sur \mathbf{S}_1 , cette dernière intégrale vaut

$$\int_0^{2\pi} e^{it} \frac{dt}{2\pi} = 0.$$

Pour la même raison,

$$\int_{(\mathbf{S}_1)^k} z_1^{a_1} \cdots z_k^{a_k} d\hat{\mu}(z_1, \dots, z_k) = \int_{\mathbf{S}_1} z d(\psi_*(\hat{\mu}))(z) = 0.$$

Le lemme est ainsi démontré. \square

Soit donc (a_1, \dots, a_k) un k -uplet d'entiers relatifs non tous nuls et soit $\psi: \mathbf{G}_m^k \rightarrow \mathbf{G}_m$ l'application donnée par

$$\psi(z_1, \dots, z_n) = z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n}.$$

Notons que tout $x \in \mathbf{G}_m^k(\overline{\mathbf{Q}})$, la mesure $\psi_*(\delta_x)$ sur $\mathbf{G}_m(\overline{\mathbf{C}})$ est égale à la mesure $\delta_{\psi(x)}$. Lorsque n tend vers l'infini, la suite de mesures de probabilité $(\delta_{\psi(x_n)})$ sur $\mathbf{G}_m(\mathbf{C})$ converge donc vers la mesure $\psi_*(\nu)$. Nous allons déduire de la proposition 3.4.1 que $\psi_*(\nu)$ est la mesure de Haar normalisée $\hat{\mu}_1$ portée par \mathbf{S}_1 .

Le lemme suivant vérifie que les hauteurs des points $\psi(x_n)$ tendent vers 0.

LEMME 3.4.5. — Pour $x \in \mathbf{G}_m^k(\overline{\mathbf{Q}})$, on a

$$h(\psi(x)) \leq (|a_1| + \cdots + |a_n|) h(x).$$

Démonstration. — Compte tenu de la relation $h(\alpha^{-1}) = h(\alpha)$, il suffit de démontrer que pour $\alpha, \beta \in \overline{\mathbf{Q}}^*$, on a $h(\alpha\beta) \leq h(\alpha) + h(\beta)$. On conclut alors en effet par récurrence. Revenons à la formule (1.2.7) définissant la hauteur d'un point et observons l'inégalité

$$\max(0, u + v) \leq \max(0, u) + \max(0, v),$$

valable pour tout couple (u, v) de nombres réels. Si K est un corps de nombres contenant α et β , il vient ainsi

$$\begin{aligned} h(\alpha\beta) &= \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{p \leq \infty} \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \max(1, |\alpha\beta|_p) \\ &\leq \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{p \leq \infty} \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \left(\log \max(1, |\alpha|_p) + \log \max(1, |\beta|_p) \right) \\ &\leq h(\alpha) + h(\beta). \end{aligned}$$

\square

Si une sous-suite de la suite $(\psi(x_n))$ est constante, de valeur y , on a donc $h(y) = 0$, si bien que y est une racine de l'unité. Pour chaque entier n tel que $\psi(x_n) = y$, le point x_n appartient à la sous-variété de \mathbf{G}_m^k définie par l'équation $\psi(x) = y$. C'est une sous-variété de torsion, translatée d'un sous-tore de \mathbf{G}_m^k , le noyau de ψ , par n'importe quel point de torsion $x_1 \in \mathbf{G}_m^k$ tel que $\psi(x_1) = y$. Une sous-suite de la suite (x_n) est alors toute entière contenue dans une variété de torsion, ce qui contredit l'hypothèse du théorème.

Par conséquent, la suite $(\psi(x_n))$ prend une infinité de valeurs distinctes et l'on peut extraire de la suite (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que les termes de la suite $(\psi(x_{\varphi(n)}))$ soient deux à deux distincts. Cette dernière suite est justiciable de la proposition 3.4.1, si bien que la suite $(\delta_{\psi(x_{\varphi(n)})})$ converge vers la mesure $\hat{\mu}_1$. Comme elle converge aussi vers $\psi_*(\nu)$, on a l'égalité requise $\psi_*\nu = \hat{\mu}_1$. Cela termine la démonstration de BILU du théorème 3.4.2.

§3.5. Exercices

Exercice 3.5.1. — Soit $u: \mathbf{C}_v^2 \rightarrow \mathbf{C}_v^2$ une application affine. Soit K une partie bornée de \mathbf{C}_v^2 . Montrer que le diamètre transfini homogène de $u(K)$ est égal à $|\det u| \delta^h(K)$.

Exercice 3.5.2 (DEMARCO (2003)). — Soit K un corps et soit (U, V) et (F, G) deux couples de polynômes homogènes de $K[X, Y]$. On suppose que U et V sont premiers entre eux et de même degré d , et que F et G sont premiers entre eux, de même degré e . On pose alors $U_1 = U(F, G)$ et $V_1 = V(F, G)$.

a) Montrer que U_1 et V_1 sont premiers entre eux et de degrés de .

b) Montrer que le résultant $\text{Res}(U_1, V_1)$ s'annule si et seulement si l'un des résultants $\text{Res}(U, V)$ ou $\text{Res}(F, G)$ s'annule. En déduire qu'il existe des entiers a, b et c tels que

$$\text{Res}(U_1, V_1) = c \text{Res}(U, V)^a \text{Res}(F, G)^b.$$

c) En considérant le degré du résultant $\text{Res}(U_1, V_1)$ par rapport aux coefficients des polynômes U, V, F, G , montrer que $a = e$ et $b = d^2$. Montrer aussi que $c = \pm 1$ (si un nombre premier p divisait c , le résultant $\text{Res}(U_1, V_1)$ serait identiquement nul en caractéristique p).

d) Considérer un cas particulier et vérifier que $c = 1$.

Exercice 3.5.3. — a) Soit (X, d) un espace métrique et soit α un nombre réel positif. Une fonction $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ est dite α -hölderienne si $|\varphi(x) - \varphi(y)| / d(x, y)^\alpha$ est majoré lorsque (x, y) parcourt l'ensemble des couples de points distincts de X . La borne supérieure de cette expression est notée $\|\varphi\|'_\alpha$. Vérifier que l'on définit une norme sur l'espace vectoriel E des fonctions α -hölderiennes bornées en posant $\|f\|_\alpha = \max(\|f\|'_\alpha, \|f\|_\infty)$, et que cet espace vectoriel ainsi normé est complet.

b) Soit $f: X \rightarrow X$ une application C -lipschitzienne (c'est-à-dire que $d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$ pour tout couple (x, y) de points de X) ; soit k un nombre réel tel que $|k| < 1$ et soit φ_0 une fonction dans E . Montrer que l'application $\varphi \mapsto T\varphi = k\varphi \circ f + \varphi_0$ applique E dans lui-même ; démontrer que si $\alpha < \log|k|^{-1} / \log C$, alors T est contractante. (Voir aussi DINH & SIBONY (2005), lemme 5.4.2.)

Exercice 3.5.4. — Soit K un corps valué complet. Pour $P = [x : y]$ et $Q = [u : v]$ dans $\mathbf{P}^1(K)$, on pose $d(P, Q) = |xv - yu| / \max(|x|, |y|) \max(|u|, |v|)$.

a) Vérifier que $d(P, Q)$ ne dépend pas du choix des coordonnées homogènes de P et Q . Montrer que d est une distance sur $\mathbf{P}^1(K)$.

b) Soit $F = [U : V]$ un endomorphisme de degré d de \mathbf{P}^1 dans lui-même, défini par deux polynômes homogènes U et $V \in K[X, Y]$ sans facteur commun, de degré d . Montrer que l'application induite par F sur $\mathbf{P}^1(K)$ est lipschitzienne.

c) On reprend les notations du paragraphe 3.1. À l'aide de l'exercice précédent, prouver que l'application $[x : y] \mapsto \Lambda_v(x, y) - \log \max(|x|, |y|)$, bien définie sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_v)$, est hölderienne. (Voir aussi SIBONY (1999); FAVRE & RIVERA-LETÉLIER (2006); KAWAGUCHI & SILVERMAN (2007b).)

Exercice 3.5.5. — On considère deux applications continues f_1 et f_2 d'un espace métrique (X, d) dans lui-même. Soit α un nombre réel et soit E l'espace vectoriel normé

des fonctions bornées de X dans \mathbf{R} qui sont hölderiennes d'exposant α . Soit k un nombre réel tel que $|k| < 1$.

On suppose que f_1 et f_2 sont C -lipschitziennes et que $\alpha < \log|k|^{-1} / \log C$. On considère enfin deux éléments φ_1 et φ_2 de E et les applications affines T_1 et T_2 de E dans lui-même données par $T_1\varphi = k\varphi \circ f_1 + \varphi_1$ et $T_2\varphi = k\varphi \circ f_2 + \varphi_2$. Elles admettent chacune un et un seul point fixe dans E , disons $\hat{\varphi}_1$ et $\hat{\varphi}_2$. Montrer que l'on a

$$\|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2\| \leq \frac{\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\alpha + |k| \|\varphi_2\|_\alpha d(f_1, f_2)^\alpha}{1 - |k| C^\alpha},$$

où $d(f_1, f_2)$ désigne la borne supérieure des quantités $d(f_1(x), f_2(x))$ lorsque x parcourt X .

b) On reprend les notations du paragraphe 3.1. Montrer que la fonction Λ_ν définie dans le lemme 3.1.1 dépend de manière continue des coefficients des polynômes U et V , uniformément en $(x, y) \in \mathbf{C}_\nu^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 3.5.6. — Soit $f: \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ un endomorphisme de degré d de \mathbf{P}^1 donné par un couple (U, V) de polynômes homogènes de degrés d , premiers entre eux, à coefficients dans un corps valué \mathbf{C}_ν . Soit $\mathcal{J}_\nu \subset \mathbf{C}_\nu^2$ son ensemble de Julia rempli homogène.

a) À l'aide de l'exercice précédent, montrer que le diamètre transfini homogène $\delta^h(\mathcal{J}_\nu)$ dépend continûment des coefficients de U et V .

b) En déduire que la formule de la prop. 3.1.11 est vraie sans supposer que les coefficients de U et V appartiennent à un corps de nombres.

Exercice 3.5.7. — a) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ des nombres complexes. À l'aide de l'inégalité d'Hadamard, démontrer que

$$\prod_{i < j} |\alpha_j - \alpha_i| \leq d^{d/2} \prod_{i=1}^d \max(1, |\alpha_i|)^{d-1}.$$

b) Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme de degré $d \geq 1$. Montrer que son discriminant $\Delta(P)$ et sa mesure de Mahler $M(P)$ sont reliés par l'inégalité, due à MAHLER,

$$|\Delta(P)| \leq d^d M(P)^{2d-2}.$$

c) Quels sont les polynômes pour lesquels l'inégalité précédente est une égalité ?

Exercice 3.5.8. — Soit d un entier au moins égal à 2 et soit f l'endomorphisme de \mathbf{P}^1 donné par $f = [U : V]$, avec $U = X^d$ et $V = Y^d$.

a) L'ensemble de Julia homogène rempli \mathcal{J} est le bidisque unité, ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{C}^2$ tels que $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$.

b) Lorsque z_1, \dots, z_n parcourent K , $\prod_{i \neq j} d(z_i, z_j)$ atteint son maximum en des points de la forme $z_i = (x_i, y_i)$, où x_i et y_i sont de module 1. Il suffit alors de considérer les points de la forme $(x_i, 1)$, avec x_i de module 1.

c) Déduire alors de l'exercice précédent que

$$\delta_n(K) = n^{1/(n-1)}$$

puis retrouver la prop. 3.1.9 dans ce cas particulier.

BIBLIOGRAPHIE

- A. ABBES (1997), « Hauteurs et discrétude ». *Séminaire Bourbaki, 1996/97*, Astérisque **245**, p. 141–166. Exp. 825.
- A. ABBES & T. BOUCHE (1995), « Théorème de Hilbert–Samuel « arithmétique » ». *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **45** (2), p. 375–401.
- A. AGBOOLA & G. PAPPAS (2000), « Line bundles, rational points and ideal classes ». *Math. Res. Letters*, **7**, p. 709–717.
- E. AMERIK, M. ROVINSKY & A. VAN DE VEN (1999), « A boundedness theorem for morphisms between threefolds ». *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **49** (2), p. 405–415.
- F. AMOROSO & S. DAVID (2003), « Minoration de la hauteur normalisée dans un tore ». *J. Inst. Math. Jussieu*, **2** (3), p. 335–381.
- F. AMOROSO & S. DAVID (2004), « Distribution des points de petite hauteur dans les groupes multiplicatifs ». *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, **3** (2), p. 325–348.
- F. AMOROSO & S. DAVID (2006), « Points de petite hauteur sur une sous-variété d’un tore ». *Compos. Math.*, **142** (3), p. 551–562.
- S. J. ARAKELOV (1974), « An intersection theory for divisors on an arithmetic surface ». *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **38**, p. 1179–1192.
- P. AUTISSIER (2001), « Points entiers sur les surfaces arithmétiques ». *J. reine angew. Math.*, **531**, p. 201–235.
- M. BAKER (2006), « A lower bound for average values of dynamical Green’s functions ». *Math. Res. Lett.*, **13** (2-3), p. 245–257. *arXiv:math.NT/0507484*.
- M. BAKER (2009), « A finiteness theorem for canonical heights attached to rational maps over function fields ». *J. reine angew. Math.*, p. 205–233. *arXiv:math.NT/0601046*.
- M. BAKER & C. PETSCHKE (2005), « Global discrepancy and small points on elliptic curves ». *Int. Math. Res. Not.*, **61**, p. 3791–3834.
- M. H. BAKER & L.-C. HSIA (2005), « Canonical heights, transfinite diameters, and polynomial dynamics ». *J. Reine Angew. Math.*, **585**, p. 61–92. *arXiv:math.NT/0305181*.
- M. H. BAKER & R. RUMELY (2006), « Equidistribution of small points, rational dynamics, and potential theory ». *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **56** (3), p. 625–688. *arXiv:math.NT/0407426*.

- A. BEAUVILLE (1983), « Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle ». *J. Differential Geom.*, **18** (4), p. 755–782.
- A. BEAUVILLE (2001), « Endomorphisms of hypersurfaces and other manifolds ». *Internat. Math. Res. Notices*, **1**, p. 53–58.
- R. L. BENEDETTO (2007), « Preperiodic points of polynomials over global fields ». *J. Reine Angew. Math.*, **608**, p. 123–153.
- V. G. BERKOVICH (1990), *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs **33**, American Mathematical Society, Providence, RI.
- H. BILLARD (1997), « Propriétés arithmétiques d’une famille de surfaces $K3$ ». *Compositio Math.*, **108** (3), p. 247–275.
- Yu. BILU (1997), « Limit distribution of small points on algebraic tori ». *Duke Math. J.*, **89** (3), p. 465–476.
- J.-M. BISMUT & É. VASSEROT (1989), « The asymptotics of the Ray-Singer analytic torsion associated with high powers of a positive line bundle ». *Comm. Math. Phys.*, **125** (2), p. 355–367.
- E. A. BOGOMOLOV (1974a), « Kähler manifolds with trivial canonical class ». *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **38**, p. 11–21.
- E. A. BOGOMOLOV (1974b), « The decomposition of Kähler manifolds with a trivial canonical class ». *Mat. Sb. (N.S.)*, **93(135)**, p. 573–575, 630.
- E. A. BOGOMOLOV (1980), « Points of finite order on abelian varieties ». *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, **44** (4), p. 782–804, 973.
- E. BOMBIERI & W. GUBLER (2006), *Heights in Diophantine geometry*, New Mathematical Monographs **4**, Cambridge University Press, Cambridge.
- J.-B. BOST, H. GILLET & C. SOULÉ (1994), « Heights of projective varieties and positive Green forms ». *J. Amer. Math. Soc.*, **7**, p. 903–1027.
- H. BROLIN (1965), « Invariant sets under iteration of rational functions ». *Ark. Mat.*, **6**, p. 103–144 (1965).
- G. CALL & J. SILVERMAN (1993), « Canonical heights on varieties with morphisms ». *Compositio Math.*, **89**, p. 163–205.
- G. S. CALL & S. W. GOLDSTINE (1997), « Canonical heights on projective space ». *J. Number Theory*, **63** (2), p. 211–243.
- S. CANTAT (2001), « Dynamique des automorphismes des surfaces $K3$ ». *Acta Math.*, **187** (1), p. 1–57.
- S. CANTAT (2003), « Endomorphismes des variétés homogènes ». *Enseign. Math. (2)*, **49** (3-4), p. 237–262.
- A. CHAMBERT-LOIR (2000), « Points de petite hauteur sur les variétés semi-abéliennes ». *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **33** (6), p. 789–821.
- A. CHAMBERT-LOIR (2006), « Mesures et équidistribution sur des espaces de Berkovich ». *J. reine angew. Math.*, **595**, p. 215–235. Math.NT/0304023.
- J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE (1992), « L’arithmétique des variétés rationnelles ». *Annales de la faculté des sciences de Toulouse Sér. 6*, **1** (3), p. 295–336.
- S. DAVID & M. HINDRY (2000), « Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M ». *J. Reine Angew. Math.*, **529**, p. 1–74.

- S. DAVID & P. PHILIPPON (1998), « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes ». *International Conference on Discrete Mathematics and Number Theory*, Contemp. Math. **210**, p. 333–364, Tiruchirapelli, 1996.
- S. DAVID & P. PHILIPPON (1999), « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores ». *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **28** (3), p. 489–543.
- S. DAVID & P. PHILIPPON (2000), « Sous-variétés de torsion des variétés semi-abéliennes ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **331** (8), p. 587–592.
- S. DAVID & P. PHILIPPON (2002), « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes. II ». *Comment. Math. Helv.*, **77** (4), p. 639–700.
- J.-P. DEMAILLY (1993), « Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory ». *Complex analysis and geometry*, Univ. Ser. Math., p. 115–193, Plenum, New York.
- L. DEMARCO (2003), « Dynamics of rational maps : Lyapunov exponents, bifurcations, and capacity ». *Math. Ann.*, **326** (1), p. 43–73.
- L. DEMARCO & R. RUMELY (2007), « Transfinite diameter and the resultant ». *J. reine angew. Math.*, **611**, p. 145–161. *arXiv:math.CV/0601109*.
- L. DENIS (1995), « Points périodiques des automorphismes affines ». *J. Reine Angew. Math.*, **467**, p. 157–167.
- T.-C. DINH & N. SIBONY (2005), « Green currents for holomorphic automorphisms of compact Kähler manifolds ». *J. Amer. Math. Soc.*, **18** (2), p. 291–312.
- E. DOBROWOLSKI (1979), « On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial ». *Acta Arith.*, **34** (4), p. 391–401.
- P. ERDÖS & P. TURÁN (1950), « On the distribution of roots of polynomials ». *Ann. of Math. (2)*, **51**, p. 105–119.
- A. È. ERÊMENKO (1989), « Some functional equations connected with the iteration of rational functions ». *Algebra i Analiz*, **1** (4), p. 102–116.
- N. FAKHRUDDIN (2003), « Questions on self-maps of algebraic varieties ». *J. Ramanujan Math. Soc.*, **18** (2), p. 109–122.
- G. FALTINGS (1984), « Calculus on arithmetic surfaces ». *Ann. of Math. (2)*, **119** (2), p. 387–424.
- G. FALTINGS (1991), « Diophantine approximation on abelian varieties ». *Ann. of Math. (2)*, **133** (3), p. 549–576.
- G. FALTINGS (1992), *Lectures on the arithmetic Riemann-Roch theorem*, Annals of Mathematics Studies **127**, Princeton University Press, Princeton, NJ. Notes taken by Shouwu Zhang.
- C. FAVRE & J. RIVERA-LETELIER (2006), « Equidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective ». *Math. Ann.*, **335** (2), p. 311–361. *arXiv:math.NT/0407471*.
- M. FLEXOR & J. OESTERLÉ (1990), « Sur les points de torsion des courbes elliptiques ». *Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques*, édité by L. SZPIRO, Astérisque **183**, p. 25–36.
- Y. FUJIMOTO (2002), « Endomorphisms of smooth projective 3-folds with non-negative Kodaira dimension ». *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **38** (1), p. 33–92.

- Y. FUJIMOTO & N. NAKAYAMA (2005), « Compact complex surfaces admitting non-trivial surjective endomorphisms ». *Tohoku Math. J. (2)*, **57** (3), p. 395–426.
- W. FULTON (1998), *Intersection theory*, Springer-Verlag, Berlin, second édition.
- D. GHIOCA & T. TUCKER (2009), « A counter-example for the dynamical Manin-Mumford conjecture ».
- H. GILLET & C. SOULÉ (1988), « Amplitude arithmétique ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **307**, p. 887–890.
- H. GILLET & C. SOULÉ (1990a), « Arithmetic intersection theory ». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **72**, p. 94–174.
- H. GILLET & C. SOULÉ (1990b), « Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric I, II ». *Ann. of Math.*, **131**, p. 163–203.
- H. GILLET & C. SOULÉ (1992), « An arithmetic Riemann–Roch theorem ». *Invent. Math.*, **110**, p. 473–543.
- M. GROMOV (2003), « On the entropy of holomorphic maps ». *Enseign. Math. (2)*, **49** (3–4), p. 217–235.
- W. GUBLER (1998), « Local heights of subvarieties over non-archimedean fields ». *J. reine angew. Math.*, **498**, p. 61–113.
- W. GUBLER (2003), « Local and canonical heights of subvarieties ». *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **2** (4), p. 711–760.
- W. GUBLER (2007), « The Bogomolov conjecture for totally degenerate abelian varieties ». *Invent. Math.*, **169** (2), p. 377–400.
- M. HINDRY (1988), « Autour d’une conjecture de Serge Lang ». *Invent. Math.*, **94** (3), p. 575–603.
- M. HINDRY & J. H. SILVERMAN (2000), *Diophantine geometry*, Graduate Texts in Mathematics **201**, Springer-Verlag, New York. An introduction.
- G. HÖHN & N.-P. SKORUPPA (1993), « Un résultat de Schinzel ». *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **5** (1), p. 185.
- E. HRUSHOVSKI (2001), « The Manin-Mumford conjecture and the model theory of difference fields ». *Ann. Pure Appl. Logic*, **112** (1), p. 43–115.
- E. HRUSHOVSKI (2004), « The Elementary Theory of the Frobenius Automorphisms ». *arXiv:math.LO/0406514*.
- S. KAWAGUCHI (1999), « Some remarks on rational periodic points ». *Math. Res. Lett.*, **6** (5–6), p. 495–509.
- S. KAWAGUCHI (2006), « Canonical height functions for affine plane automorphisms ». *arXiv:math.NT/0405007*.
- S. KAWAGUCHI (2008), « Projective surface automorphisms of positive topological entropy from an arithmetic viewpoint ». *Amer. J. Math.*, **130** (1), p. 159–186. *arXiv:math.AG/0510634*.
- S. KAWAGUCHI & J. H. SILVERMAN (2007a), « Dynamics of projective morphisms having identical canonical heights ». *Proc. London Math. Soc.*, **95**, p. 519–544.
- S. KAWAGUCHI & J. H. SILVERMAN (2007b), « Nonarchimedean Green functions and dynamics on projective space ». *arXiv:0706.2169*.
- S. LANG (1983), *Fundamentals of Diophantine geometry*, Springer-Verlag, New York.
- S. LANG (1988), *Introduction to Arakelov theory*, Springer-Verlag, New York.

- S. LANG (1995), « Les formes bilinéaires de Néron et Tate ». *Séminaire Bourbaki*, 1963/64, p. 435–445, Soc. Math. France, Paris. Exposé 274.
- M. LAURENT (1983), « Minoration de la hauteur de Néron-Tate ». *Seminar on number theory, Paris 1981–82 (Paris, 1981/1982)*, Progr. Math. **38**, p. 137–151, Birkhäuser Boston, Boston, MA.
- D. H. LEHMER (1933), « Factorization of certain cyclotomic functions ». *Ann. of Math.* (2), **34** (3), p. 461–479.
- G. LEVIN & F. PRZYTICKI (1997), « When do two rational functions have the same Julia set? » *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (7), p. 2179–2190.
- D. J. LEWIS (1972), « Invariant sets of morphisms on projective and affine number spaces ». *J. Algebra*, **20**, p. 419–434.
- M. J. LYUBICH (1983), « Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere ». *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **3** (3), p. 351–385.
- S. MARCELLO (2003), « Sur la dynamique arithmétique des automorphismes de l'espace affine ». *Bull. Soc. Math. France*, **131** (2), p. 229–257.
- D. W. MASSER (1984), « Small values of the quadratic part of the Néron-Tate height on an abelian variety ». *Compositio Math.*, **53** (2), p. 153–170.
- B. MAZUR (1977), « Modular curves and the Eisenstein ideal ». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **47**, p. 33–186 (1978).
- C. T. MCMULLEN (2002), « Dynamics on $K3$ surfaces : Salem numbers and Siegel disks ». *J. Reine Angew. Math.*, **545**, p. 201–233.
- L. MEREL (1996), « Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres ». *Invent. Math.*, **124** (1-3), p. 437–449.
- J. MILNOR (2006), « On Lattès maps ». *Dynamics on the Riemann Sphere, A Bodil Branner Festschrift*, édité by P. G. HJORTH & C. L. PETERSENS, European mathematical society. *arXiv:math.DS/0402147*, Stony Brook IMS Preprint #2004/01.
- A. MIMAR (1997), *On the preperiodic points of an endomorphism of $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$* . Phd thesis, Columbia University.
- P. MORTON & J. H. SILVERMAN (1994), « Rational periodic points of rational functions ». *Internat. Math. Res. Notices*, **2**, p. 97–109.
- D. MUMFORD (1974), *Abelian Varieties*, Oxford Univ. Press.
- N. NAKAYAMA (2002), « Ruled surfaces with non-trivial surjective endomorphisms ». *Kyushu J. Math.*, **56** (2), p. 433–446.
- A. NÉRON (1965), « Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes ». *Ann. of Math.* (2), **82**, p. 249–331.
- D. G. NORTHCOTT (1950), « Periodic points on an algebraic variety ». *Ann. of Math.*, **51**, p. 167–177.
- F. PAZUKI (2009), « Zhang's conjecture and squares of abelian surfaces ».
- E. PEYRE (2002), « Points de hauteur bornée et géométrie des variétés (d'après Y. Manin et al.) ». *Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001*, Astérisque **282**, p. Exp. No. 891, ix, 323–344.
- P. PHILIPPON (1991), « Sur des hauteurs alternatives, I ». *Math. Ann.*, **289**, p. 255–283.
- P. PHILIPPON (1995), « Sur des hauteurs alternatives, III ». *J. Math. Pures Appl.*, **74**, p. 345–365.

- R. PINK & D. ROESSLER (2002), « On Hrushovski's proof of the Manin-Mumford conjecture ». *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002)*, p. 539–546, Higher Ed. Press, Beijing.
- R. PINK & D. ROESSLER (2004), « On ψ -invariant subvarieties of semiabelian varieties and the Manin-Mumford conjecture ». *J. Algebraic Geom.*, **13** (4), p. 771–798.
- B. POONEN (1999), « Mordell-Lang plus Bogomolov ». *Invent. Math.*, **137** (2), p. 413–245.
- T. RANSFORD (1995), *Potential theory in the complex plane*, Cambridge University Press, Cambridge.
- M. RAYNAUD (1983a), « Courbes sur une variété abélienne et points de torsion ». *Invent. Math.*, **71** (1), p. 207–233.
- M. RAYNAUD (1983b), « Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion ». *Arithmetic and Geometry. Papers dedicated to I.R. Shafarevich*, édité by M. ARTIN & J. TATE, Progr. Math. **35**, p. 327–352, Birkhäuser.
- J. F. RITT (1923), « Permutable rational functions ». *Trans. Amer. Math. Soc.*, **25** (3), p. 399–448.
- D. ROESSLER (2005), « A note on the Manin-Mumford conjecture ». *Number fields and function fields—two parallel worlds*, Progr. Math. **239**, p. 311–318, Birkhäuser Boston, Boston, MA.
- R. RUMELY (1999), « On Bilu's equidistribution theorem ». *Spectral problems in geometry and arithmetic*, Contemp. Math. **237**, p. 159–166, Iowa City, IA, 1997.
- S. SCHANUEL (1979), « Heights in number fields ». *Bull. Soc. Math. France*, **107**, p. 433–449.
- A. SCHINZEL (1974/75), « Addendum to the paper : "On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic number" (Acta Arith. **24** (1973), 385–399) ». *Acta Arith.*, **26** (3), p. 329–331.
- J.-P. SERRE (1960), « Analogues kähleriens de certaines conjectures de Weil ». *Ann. of Math.*, **71**, p. 392–394.
- J.-P. SERRE (1986), « Résumé des cours de 1985–1986 ». *Annuaire du Collège de France (1986)*, p. 95–99, Collège de France. Œuvres, IV, p. 33–37.
- J.-P. SERRE (1997), *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, third édition. Translated from the French and edited by Martin Brown from notes by Michel Waldschmidt, With a foreword by Brown and Serre.
- J.-P. SERRE (2000), *Local algebra*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin. Translated from the French by CheeWhye Chin and revised by the author.
- N. SIBONY (1999), « Dynamique des applications rationnelles de \mathbf{P}^k ». *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, Panorama et Synthèses **8**, p. 97–185, Soc. Math. France, Paris.
- J. H. SILVERMAN (1991), « Rational points on $K3$ surfaces : a new canonical height ». *Invent. Math.*, **105** (2), p. 347–373.
- J. H. SILVERMAN (1994), « Geometric and arithmetic properties of the Hénon map ». *Math. Z.*, **215** (2), p. 237–250.

- J. H. SILVERMAN (2007), *The arithmetic of dynamical systems*, Graduate Texts in Mathematics **241**, Springer, New York.
- Y. T. SIU (1993), « An effective Matsusaka big theorem ». *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **43** (5), p. 1387–1405.
- C. SOULÉ, D. ABRAMOVICH, J.-F. BURNOL & J. KRAMER (1992), *Lectures on Arakelov geometry*, Cambridge studies in advanced mathematics **33**, Cambridge University Press.
- L. SZPIRO (1990), « Sur les propriétés numériques du dualisant relatif d'une surface arithmétique ». *The Grothendieck Festschrift*, édité by P. CARTIER, L. ILLUSIE, N. M. KATZ, G. LAUMON, Yu. MANIN & K. RIBET, **3**, p. 229–246, Birkhäuser.
- L. SZPIRO, E. ULLMO & S.-W. ZHANG (1997), « Équidistribution des petits points ». *Invent. Math.*, **127**, p. 337–348.
- B. TEISSIER (1990), « Résultats récents d'algèbre commutative effective ». *Séminaire Bourbaki, Vol. 1989/90*, Astérisque **189-190**, p. Exp. No. 718, 107–131.
- E. ULLMO (1998), « Positivité et discrétion des points algébriques des courbes ». *Ann. of Math.*, **147** (1), p. 167–179.
- M. WALDSCHMIDT (2000), *Diophantine approximation on linear algebraic groups. Transcendence properties of the exponential function in several variables*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **326**, Springer-Verlag.
- S. T. YAU (1978), « On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I ». *Comm. Pure Appl. Math.*, **31** (3), p. 339–411.
- Y. YOMDIN (1987), « Volume growth and entropy ». *Israel J. Math.*, **57** (3), p. 285–300.
- X. YUAN (2008), « Big line bundles on arithmetic varieties ». *Invent. Math.*, **173**, p. 603–649. *arXiv:math.NT/0612424*.
- S.-W. ZHANG (1995a), « Positive line bundles on arithmetic varieties ». *J. Amer. Math. Soc.*, **8**, p. 187–221.
- S.-W. ZHANG (1995b), « Small points and adelic metrics ». *J. Algebraic Geometry*, **4**, p. 281–300.
- S.-W. ZHANG (1998), « Equidistribution of small points on abelian varieties ». *Ann. of Math.*, **147** (1), p. 159–165.
- S.-W. ZHANG (2006), « Distributions in algebraic dynamics ». *A tribute to Professor S. S. Chern*, Surveys in Differential Geometry **10**, p. 381–430, International Press.